



Università
Ca' Foscari
Venezia

Corso di Laurea Magistrale
in Amministrazione, Finanza e Controllo

Ordinamento ex D.M. 270/2004

Tesi di Laurea

**Applicazione della Particle Swarm
Optimization per problemi di Tracking
Error portfolio**

Relatore

Prof. Marco Corazza

Correlatore

Prof.ssa Marta Cardin

Laureando

Matteo Zuccon

Matricola: 843629

Anno Accademico

2016/ 2017

INDICE

Introduzione.....	5
1 Dal modello media-varianza al Tracking-Error.....	7
1.1 Il modello media-varianza di Markowitz.....	7
1.2 Gli aspetti critici del modello di Markowitz.....	14
1.3 Il Tracking-Error.....	17
2 Particle Swarm Optimizations per la soluzione del problema di minimizzazione.....	37
2.1 Particle Swarm Optimization.....	37
2.2 Problemi vincolati ed eventuali soluzioni.....	44
3 Applicazione del modello ai titoli italiani quotati nel FTSE Mib.....	51
3.1 1° Settaggio	56
3.2 2° Settaggio.....	62
3.3 3° Settaggio.....	67
3.4 Considerazioni	72
4 Valutazione dell'efficacia del modello nel futuro virtuale.....	77
4.1 1° Settaggio <i>out-of-sample</i>	78
4.2 2° Settaggio <i>out-of-sample</i>	80
4.3 3° Settaggio <i>out-of-sample</i>	82
Conclusioni.....	85
Appendice A.....	87
Appendice B.....	103
Appendice C.....	117
Bibliografia	121

Introduzione

Nel seguente elaborato sarà affrontato il problema di minimizzazione del Tracking Error di un portafoglio rispetto ad un benchmark, che sarà il FTSE Mib. Poiché il problema trattato è complesso, verrà applicata una meta-euristica, la Particle Swarm Optimization.

Questo lavoro si suddivide in 4 capitoli. I primi due riguardanti la letteratura della selezione di portafoglio finanziario e del Tracking Error; il terzo relativo all'applicazione del modello selezionato ai dati scaricati in-sample; il quarto capitolo, infine, considera i parametri individuati nel periodo precedente che saranno utilizzati nel futuro virtuale, out-of-sample, per poter verificare l'efficacia del modello.

Nello specifico, il primo capitolo tratta una descrizione del modello media-varianza di Harry Markowitz per poi analizzare le sue criticità. Successivamente sarà introdotto il concetto di Tracking Error (TE), come una possibile risoluzione di alcuni limiti del modello di Markowitz, utilizzando i lavori presentati da Richard Roll e Philippe Jorion. Si discuterà infine il modello di Roel Jansen e Ronald van Dijk preso poi come riferimento per la selezione del portafoglio che minimizza il TE.

Il secondo capitolo tratta la Particle Swarm Optimization (PSO), meta-euristica di ispirazione biologica, che sarà utilizzata come metodo risolutivo del modello modificato di Jansen e van Dijk. Essendo una tecnica per la ricerca di ottimi non vincolati, alla fine del capitolo saranno affrontate delle possibili soluzioni per adattare la PSO a problemi vincolati.

Il terzo e il quarto capitolo rappresentano la parte applicativa dell'elaborato. Inizialmente nel terzo capitolo sarà fatta una breve panoramica sulla situazione dei mercati finanziari degli ultimi dieci anni in quanto ancora oggi risentono degli effetti causati dalle crisi degli anni 2007 e 2011. Successivamente sarà introdotto il modello sul quale sarà applicata la PSO per la selezione del portafoglio ottimo in termini di

minor valore di fitness. I risultati saranno condotti grazie ad un codice creato appositamente per il problema che sarà risolto con l'utilizzo di Matlab. I portafogli finanziari risultanti dalle varie prove saranno divisi in tre settaggi, ciascuno con un vincolo diverso di numero di titoli detenibili nel portafoglio. Ciascun settaggio sarà diviso a sua volta in quattro configurazioni caratterizzate da un numero diverso di particelle e di iterazioni. I migliori e i peggiori portafogli finanziari dei tre settaggi saranno infine commentati e accompagnati da un grafico sulla funzione di fitness e da uno sul Tracking Error. In poche parole, questo capitolo si concentra sulla stima dei parametri in-sample che poi saranno applicati nel quarto capitolo per verificare la validità del modello nell'out-of-sample, detto anche futuro virtuale. Nell'ultima parte dell'elaborato, quindi, si supporrà di essere un investitore al 30/04/2017 e di voler investire i parametri stimati in-sample nel mese successivo out-of-sample verificando se l'andamento del portafoglio finanziario coinciderà con l'andamento del FTSE Mib. In conclusione si esprimeranno delle osservazioni riguardanti i risultati ottenuti nell'intero elaborato.

CAPITOLO 1

Dal modello media-varianza al Tracking Error

In questo primo capitolo sarà riportato l'approccio media-varianza elaborato da Harry Markowitz. Una volta analizzati i limiti derivanti da questo metodo, sarà introdotto l'approccio del Tracking-Error presentato da Richard Roll e Philippe Jorion. In conclusione sarà presentato il modello di Tracking-Error applicato da Jansen e Van Dijk che sarà preso come riferimento nell'elaborato.

1.1 Il modello media-varianza di Markowitz

Prima di addentrarsi nel seguente elaborato è opportuno avere chiari alcuni concetti per una più facile comprensione.

La teoria finanziaria classica afferma che l'utilità apportata all'investitore da un dato investimento sia definita dalle due variabili di rischio e rendimento. Il rendimento può essere misurato mediante la variazione percentuale del valore dell'attività nel periodo considerato, mentre il rischio rappresenta il prezzo da pagare per la possibilità di un maggior guadagno rispetto ad investimenti alternativi che promettono un minor guadagno. Si possono distinguere rischi puri, cioè la probabilità di subire perdite dovute al manifestarsi di eventi dannosi di tipo aleatorio, e rischi economici, probabilità che il rendimento dell'attività vari positivamente o negativamente rispetto al suo valore medio. Vi sono inoltre delle altre definizioni che è opportuno aver presente poiché utili alla comprensione dei modelli affrontati nell'elaborato:

- Avversione al rischio degli investitori: a parità di rendimento atteso, si predilige l'attività con minor rischio;

- Non sazietà degli investitori: gli investitori desiderano sempre un rendimento maggiore di uno minore;
- Paniere di strumenti finanziari: insieme di N attività finanziarie dove poter investire la propria ricchezza;
- Staticità: investimento uni-periodale senza un eventuale reinvestimento al tempo t_1 .

Un investitore, inoltre, viene definito razionale quando le sue decisioni si basano sulle funzioni di utilità e non risentono degli stimoli emozionali.

In questo elaborato non si andrà a trattare singolarmente i titoli, bensì un portafoglio finanziario costituito da n titoli. Quando un soggetto si ritrova ad avere un surplus di reddito, è incentivato ad investire questo surplus, tutto o in parte, in modo da trasferirlo avanti nel tempo.

Supponendo, quindi, di disporre di n titoli differenti, è possibile formare un portafoglio finanziario. La ricchezza in eccesso X_0 sarà ripartita tra i diversi titoli. Si avranno gli importi X_{0i} dove $i = 1, 2, \dots, n$ tale che $\sum_{i=1}^n X_{0i} = X_0$. Nel caso in cui fosse ammesso lo shorting, si avrebbero alcuni importi X_{0i} investiti nei titoli i negativi.

Nel portafoglio ciascun titolo i avrà un suo determinato peso w_i e si avrà pertanto che $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Considerando inoltre che R_i è il rendimento aleatorio del titolo i , il rendimento generato dal titolo i sarà pari a $R_i X_{0i} = R_i w_i X_0$ e il rendimento totale generato dal portafoglio sarà dato dalla sommatoria dei rendimenti generati da ciascun titolo. Avremo quindi:

$$R_{\text{portafoglio}} = \sum_{i=1}^n \frac{R_i * w_i * X_0}{X_0} = \sum_{i=1}^n w_i * R_i$$

Si può concludere dicendo che il rendimento totale del portafoglio sia uguale alla sommatoria pesata dei rendimenti dei singoli titoli.

Abbiamo appena visto il rendimento certo di un portafoglio finanziario, ma il rendimento atteso e la varianza del rendimento di ogni portafoglio P possono essere ricondotti a queste formule:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(r_i);$$
$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{Cov}(r_i, r_j).$$

Il primo contributo alla definizione dei modelli di selezione del portafoglio lo si deve a Harry Markowitz nel 1952. Egli presenta il modello media – varianza che ancora oggi viene utilizzato da molti gestori professionali sia come riferimento per i portafogli più complessi sia come metro di paragone. Markowitz afferma che risulta inconcludente considerare soltanto le caratteristiche dei titoli presi individualmente, ma risulta opportuno tenere conto della correlazione che esiste tra i loro rendimenti. Per poter scegliere il migliore portafoglio finanziario per un investitore con determinate richieste e caratteristiche, il primo step è quello di stabilire una misura di redditività ed una di rischiosità. È necessario tenere conto che le attività finanziarie oggetto di investimento hanno un rendimento aleatorio in quanto la quantità di denaro che si riceverà dalla vendita del titolo a t_1 , è incerta al momento t_0 dell'acquisto. Si fa per questo ricorso alla statistica, che permette di inserire in un modello finanziario tale casualità. Si considera perciò come misura di rendimento il valore atteso del rendimento del portafoglio, e come misura di rischio la varianza come possibile deviazione dalla media. Rispettivamente si avrà:

- Valore medio di R_p , $\mu_p = E [R_p]$;
- Varianza di R_p , $\sigma_p^2 = E^*(R_p - \mu_p)^2$.

La misura di redditività quindi è funzione del rendimento atteso di ogni titolo, il rischio è misurato dalla varianza che è funzione della varianza dei singoli titoli inclusi nel portafoglio, e la relazione tra i titoli è data dalla correlazione (Luenberger, 2006). Occorre adesso individuare quali sono i portafogli che fanno parte della frontiera

efficiente, composta dai portafogli posti lungo la frontiera che per un dato rendimento hanno un minor rischio e per un determinato grado di rischio hanno maggior rendimento. I portafogli situati sulla frontiera efficiente sono i portafogli efficienti cioè le migliori combinazioni tra rischio e rendimento. Si distinguono di conseguenza i portafogli dominanti e quelli dominati, infatti avremo che:

- A parità di varianza, ma valori di rendimento atteso differenti si dice che X domina Y se $\mu_x \geq \mu_y$;
- A parità di valori di rendimento atteso, X domina Y quando $\sigma^2_x \leq \sigma^2_y$.

Rispettivamente si avrà che gli investitori, a parità di varianza, sceglieranno il portafoglio con il rendimento atteso maggiore (insaziabilità) e, a parità di rendimento atteso, sceglieranno il portafoglio con minore varianza (risk-averse, avversione al rischio). Essi rappresentano degli ottimi paretiani, dato che non è possibile aumentare il rendimento atteso senza aumentare la varianza o diminuire la varianza senza diminuire il rendimento atteso. Quindi la scelta di un investitore razionale ricade su un portafoglio di questa categoria. La determinazione della frontiera efficiente, avendo a disposizione N titoli a rendimento aleatorio, avviene formulando il problema matematico che permette di individuare i portafogli di minima varianza:

$$\min_x x'Vx$$

$$\text{con vincoli } \begin{cases} x'\bar{r} = \pi \\ x'e = 1 \end{cases}$$

- X è il vettore di ordine N contenente le quote di investimenti in ciascun titolo i ;
- V è la matrice delle varianze e covarianze;
- \bar{r} è il vettore contenente i rendimenti medi di ciascun titolo i ;
- e è un vettore unitario di ordine N;
- π è il rendimento atteso dall'investitore.

Il primo vincolo tiene conto che la minimizzazione del rischio debba avvenire considerando il livello di rendimento atteso desiderato π . Il secondo vincolo è il vincolo di bilancio dove si richiede di investire l'intero capitale disponibile. Inserendo nel problema di ottimizzazione, oltre al rendimento atteso e alla varianza, anche la covarianza, è possibile tracciare un'iperbole, la frontiera efficiente, che individua in ogni suo punto una combinazione di titoli che danno il maggior rendimento/minor rischio dato un certo livello di rischio/rendimento. Nell'esempio riportato nella figura 1 è possibile notare il portafoglio che ha la minore varianza rispetto a tutti i portafogli sulla frontiera, detto anche global minimum variance portfolio (GMVP). Si osserva, inoltre, come la frontiera al di sopra del GMVP sia caratterizzata dai portafogli efficienti, mentre nella parte sottostante il GMVP sono presenti i portafogli inefficienti dato che, a parità di rischio, è possibile trovare portafogli con rendimento più alto.

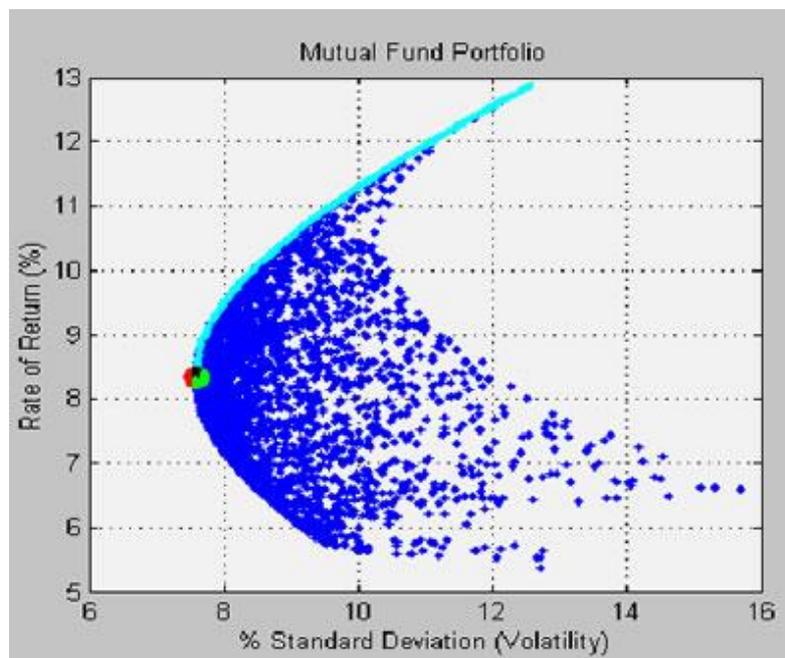


Figura 1: Frontiera efficiente.
Fonte: www.forexinfo.it

Nella frontiera efficiente sono presenti molti portafogli e il portafoglio ottimo per un investitore viene individuato mediante l'osservazione attenta delle preferenze e della sua avversione al rischio. Siccome stiamo parlando in termini aleatori, si pone l'obiettivo di massimizzare l'utilità attesa dell'investitore. Bisogna inoltre considerare

che la funzione di utilità della moneta è crescente (non sazietà degli investitori) e concava (avversione al rischio degli investitori). Questa concavità implica la disuguaglianza di Jensen, dove un individuo avverso al rischio attribuisce una maggior utilità all'importo $g=E(G)$ rispetto all'importo aleatorio G , quindi $U(E[G]) > E(U[G])$. Markowitz utilizza la funzione di utilità quadratica per giungere all'obiettivo:

$$U = R_p - A\sigma_p^2$$

dove:

- R_p è il rendimento atteso del portafoglio;
- A è il coefficiente di avversione al rischio dell'investitore, maggiore è A maggiore sarà l'avversione al rischio.

Si tratta, quindi, di massimizzare l'utilità attesa dell'investitore, tenendo conto dell'avversione al rischio, purché il portafoglio scelto sia sulla frontiera efficiente. Deve esserci inoltre una coerenza tra frontiera efficiente e massimizzazione dell'utilità attesa. Riassumendo, la determinazione del portafoglio ottimo può avvenire usando il problema di massimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \max E[U(R_p)] \\ \text{s.t } \sigma_p^2 = f(R_p) \end{aligned}$$

In poche parole, si tratta di massimizzare l'utilità attesa dell'investitore, tenendo conto del grado di avversione al rischio, purché il portafoglio selezionata appartenga alla parte efficiente della frontiera.

Markowitz, inoltre, dimostra che un investitore è in grado di costruire portafogli ottimi che massimizzino il rendimento atteso dato il livello di rischio, o minimizzino il rischio dato il livello di rendimento atteso. Ciò può essere raggiunto grazie alla diversificazione all'interno del portafoglio. Questo consiste nel far sì che i titoli appartenenti al portafoglio non siano caratterizzati da alti livelli di correlazione. La diversificazione si ha quando, allocando la ricchezza disponibile sulle $N > 1$ attività, si

sfrutta la correlazione per ridurre al minimo il rischio del portafoglio. Al fine di esemplificare, si considera il caso del portafoglio equi-pesato. In termini matematici se si rappresenta la media della varianza e la covarianza media dei titoli come:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 ;$$

$$\overline{cov} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n Cov(r_i, r_j)$$

si può giungere ad una definizione di varianza di portafoglio pari a:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n} \bar{\sigma}^2 + \frac{n-1}{n} * \overline{Cov}.$$

Si nota come, quando la $\overline{Cov} = 0$, si abbia una situazione caratterizzata solo dal rischio sistematico, cioè la tendenza del rendimento di un'attività a variare in conseguenza di variazioni del mercato. Il primo addendo pertanto si avvicinerà allo zero man mano che il numero n titoli aumenterà. Si può raggiungere la diversificazione e quindi minimizzare il rischio di portafoglio quando i titoli non sono correlati tra di loro. Nel caso in cui la $\overline{Cov} > 0$, la varianza del portafoglio rimane positiva nonostante sia elevato il numero di asset al suo interno, infatti il secondo termine presente nella parte destra dell'equazione sopra descritta si avvicina alla covarianza media \overline{Cov} tanto più n diventa elevato. Si può dire quindi che la diversificazione di un portafoglio dipenda dalla covarianza dei rendimenti dei titoli e dal rischio sistematico.

1.2 Gli aspetti critici del modello di Markowitz

Il modello di Markowitz, come ogni modello matematico, presenta dei limiti che lo hanno precluso dall'utilizzo nella realtà dei mercati finanziari.

Come si è notato in precedenza, il modello è influenzato dalla qualità della stima dei rendimenti attesi e della matrice di covarianza-varianza. Si nota però come, all'aumentare di n titoli all'interno del portafoglio, aumenti anche la numerosità della stima dei loro rendimenti. Prendendo infatti in considerazione un numero di titoli pari a 100, si dovrebbero fare 100 stime di rendimenti attesi, 100 stime di varianza e 4950 stime di covarianza $((n^2-n)/2)$. È evidente come il numero di stime cresca esponenzialmente all'aumentare di n .

Uno dei limiti più grandi del modello di Markowitz è il fatto che conduca ad un errore di stima degli input utili per il processo di ottimizzazione. Porta quindi ad una massimizzazione dell'errore di stima. Il modello infatti seleziona, come principali componenti di portafoglio, i titoli caratterizzati da un elevato rendimento atteso, da correlazioni negative e bassa varianza e tende a sovrastimarne i pesi. Sono questi titoli ad essere soggetti a significativi errori di stima. Effettuare le stime dei rendimenti attesi, delle varianze e delle covarianze è inevitabile in quanto il valore reale di essi è conosciuto solamente ex-post. Queste stime degli input saranno contenute in un intervallo di confidenza e di conseguenza anche la frontiera di efficienza avrà una linea superiore e una inferiore che sono funzione della probabilità di trovare la frontiera efficiente stimata ex-ante. Quindi non si può essere certi che la frontiera calcolata sia quella reale, infatti la probabilità che le due si avvicinino dipende dall'intervallo di confidenza.

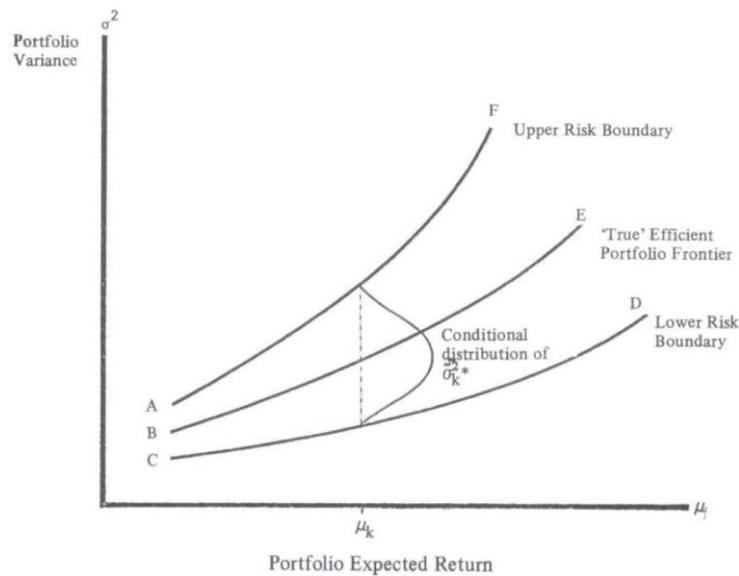


Figura 2: intervallo di confidenza della frontiera efficiente.
Fonte: Dhingra (1980)

Dalla figura si può osservare il fenomeno descritto. In centro si ha la frontiera efficiente calcolata delimitata dalle altre due linee che vanno a formare l'intervallo di confidenza. Si nota come all'aumentare dei rendimenti attesi, aumenti l'intervallo (Dhingra, 1980).

Favorendo così solo certi titoli, si avrà una concentrazione maggiore della ricchezza investita in questi titoli, facendo risultare così il portafoglio in contraddizione con il principio di diversificazione.

L'importanza degli errori di stima dipende dal grado di avversione al rischio dell'investitore. Un investitore con propensione al rischio medio-alta infatti, darà più importanza agli errori di stima sul rendimento, misura che influenza principalmente il processo di ottimizzazione, rispetto agli errori di stima della varianza e covarianza. Al contrario, un investitore con bassa propensione al rischio, darà più importanza agli errori di stima della varianza e covarianza rispetto agli errori di stima del rendimento, in quanto risulta preferibile minimizzare la varianza del portafoglio che aumentare il rendimento. Un possibile metodo per poter ridurre questo errore di stima può essere quello di introdurre dei vincoli come l'impedimento dello shorting o come l'inserimento di vincoli di peso minimo e massimo di un titolo all'interno del

portafoglio. Implicitamente si va così ad eliminare il problema delle concentrazioni di assets, richiamate precedentemente, e viene stabilito un numero minimo di titoli su cui investire. Best & Grauer (1991) dimostrano un altro problema riguardante il modello media-varianza ed è quello della sensibilità del rendimento e della varianza a cambiamenti delle stime degli input, causati ad esempio da nuove previsioni di mercato. Si può quindi desumere l'instabilità della composizione del portafoglio.

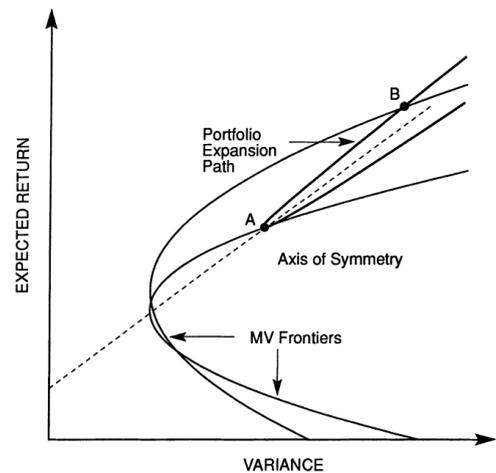


Figura 3: Portfolio Expansion Path (PEP).
Fonte: Best e Grauer (1991)

La figura 3 è basata su un portafoglio contenente 10 assets. È evidente il fatto che se venisse aumentato il rendimento del primo titolo dello 0,5%, l'investitore con propensione al rischio pari a 0,342, si muoverebbe dal punto A sulla lower minimum variance frontier al punto B situato sulla frontiera più alta. Si nota inoltre come si ottengano risultati diversi introducendo dei vincoli di non negatività. Risulta infatti che un piccolo incremento nel rendimento di un titolo del portafoglio ottimo porti ad una variazione della sua composizione, ma generalmente non del rendimento e della deviazione standard che rimangono pressoché inalterate.

È stato visto in precedenza che il punto di tangenza tra la frontiera e la curva di utilità di un determinato investitore rappresenta il portafoglio ottimo per l'investitore. Secondo Markowitz il portafoglio viene composto da titoli che rappresentano la personalità dell'investitore e la sua propensione al rischio, rendendolo così soggettivo e impossibile da confrontare con altre combinazioni efficienti di titoli scelte da un altro investitore con diversa curva di utilità.

Questi limiti caratterizzanti il modello media-varianza di Markowitz lo hanno reso poco utilizzato nella pratica ed hanno spinto gli esperti a trovare nuovi metodi più usufruibili nella realtà piuttosto che cercare portafogli matematicamente ottimali.

In questo elaborato infatti, si introdurrà il concetto di tracking error all'interno della portfolio optimization per poter superare alcune di queste criticità presentate precedentemente.

1.3 Il Tracking-Error

I modelli di seguito presentati sono stati introdotti per poter superare alcuni dei limiti riscontrati nel modello media-varianza di Markowitz. Alcune assunzioni del modello infatti risultano in contrasto con quella che è la realtà dei mercati finanziari. Inoltre, essendo i rendimenti di questo approccio distribuiti come una Normale Multivariata, questa condizione è coerente per mercati non eccessivamente volatili, quindi diversi dai mercati odierni. In aggiunta a tutto ciò si nota come la funzione di utilità quadratica non sia abbastanza flessibile e non permetta il confronto tra individui con avversione al rischio diverso. Roll (1992) suggerisce che gli investitori, per avere informazioni attendibili sulle loro performance, potrebbero affidarsi allo scostamento tra il rendimento del portafoglio gestito e il rendimento di un benchmark. Si possono individuare due tipi di gestioni del portafoglio rispetto ad un benchmark:

- Gestione attiva;
- Gestione passiva.

La gestione passiva è una strategia di investimento dove il gestore del portafoglio minimizza le proprie decisioni al fine di minimizzare i costi di transizione e l'imposizione fiscale sui guadagni. Il portafoglio in altre parole replica l'andamento di un indice di mercato, il benchmark. Parlando di gestione attiva nei portafogli finanziari, la minimizzazione della varianza della differenza tra i rendimenti del portafoglio gestito e quelli del benchmark può portare l'investitore a rendere meglio del benchmark. La soluzione del problema di minimo si ha ottenendo il portafoglio con tracking error variance (TEV) minima per un certo livello di extra-performance.

Richard Roll, partendo dall'analisi media-varianza di Markowitz, ha individuato la frontiera di minimo TEV usando la varianza del Tracking Error (TE) come misura di rischio e il rendimento atteso come profitto. Rispetto al problema di Markowitz, dove l'attenzione era rivolta al rischio assoluto, questo metodo dà rilevanza alla volatilità del TE, che rappresenta il rischio aggiuntivo (relativo) che il gestore si assume rispetto all'investimento nel benchmark. Dall'articolo di Roll risulta che, sul piano media-varianza, il portafoglio gestito in modo attivo sia lontano dalla frontiera efficiente calcolata con il metodo di Markowitz esattamente quanto lo è il benchmark. Quindi, nel caso in cui il benchmark fosse efficiente secondo il metodo media-varianza, il portafoglio TEV sarebbe sulla frontiera globale efficiente con il benchmark. Stabilito che l'obiettivo del manager sia la minimizzazione della TEV per un livello dato dell'extra-performance attesa rispetto ad un indice di riferimento, si definiscono:

- **N** : Numero di assets;
- **TE** : Tracking Error;
- **TEV** : Tracking Error Variance;
- **R_P** : Rendimento portafoglio gestito;
- **R_B** : Rendimento benchmark;
- **q_P** : Vettore dei pesi portafoglio;
- **q_B** : Vettore dei pesi benchmark;
- **$x = q_P - q_B$** : differenza azione per azione tra il portafoglio e il benchmark;
- **V** : Matrice delle varianze-covarianze degli assets;
- **E** : Vettore dei rendimenti attesi degli assets;
- **E_B** : Media benchmark;
- **V_B** : Varianza benchmark;
- **E_P** : Media del portafoglio;
- **V_P** : Varianza del portafoglio;
- **G** : Livello atteso di extra-performance, target del portfolio manager.

Come prima riportato, il TE misura il rendimento del portafoglio gestito R_P rispetto al rendimento del benchmark R_B :

$$TE = R_P - R_B$$

$$\begin{aligned} TEV = Var(TE) &= Var(R_P - R_B) = q'_P V q_P + q'_B V q_B - 2q'_P - V q_B = \\ &= (q_P - q_B)' V (q_P - q_B) = x' V x. \end{aligned}$$

La varianza del TE è quindi $x' V x$. Dal momento che $E(TE) = x' E = G$ con E valore atteso e Var varianza, la media del portafoglio P risulta come $E_P = E_B + G$. Inoltre, dato che i pesi del portafoglio P e del benchmark sommano a uno, si avrà la seguente condizione da introdurre nel problema di Roll:

$$q'_P \mathbf{1} = q'_B \mathbf{1} = 1 \leftrightarrow x' \mathbf{1} = 0$$

È importante tenere conto che le analisi sono caratterizzate dall'assenza di vincoli sulla positività dei pesi poiché, se fosse inserita questa condizione, non si otterrebbero soluzioni analitiche ai problemi di minimo.

La frontiera con TEV minima deriva dalla soluzione del seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{cases} \min_x Var(TE) = x' V x \\ \text{s. t. } x' E = G \\ x' \mathbf{1} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Ne seguono le soluzioni in termini di pesi extra:

$$x = q_P - q_B \frac{cGV^{-1} - bGV^{-1}\mathbf{1}}{ac - b^2}$$

dove $a = E'V^{-1}E$, $b = E'V^{-1}1$, $c = 1'V^{-1}1$, a , b e c sono valori scalari (Roll, 1992). È presente un trade-off tra la performance attesa e la volatilità del TE che descrive una funzione quadratica sul piano media-varianza. Eseguendo qualche calcolo, è possibile riscrivere la soluzione per x in funzione dei portafogli di varianza minima globale (indicata successivamente con 0) e di intersezione tra la linea che dall'origine degli assi passa attraverso quest'ultimo e interseca la classica frontiera efficiente (di seguito indicata con 1).

$$x = \frac{G}{R_1 - R_0} (\omega_1 - \omega_0).$$

Stabilendo il vettore dei rendimenti attesi con R , la varianza σ^2 e i pesi ω_1 e ω_0 , i portafogli 0 e 1 sono caratterizzati da:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{a}{b} & \sigma_1^2 &= \frac{a}{b^2} & \omega_1 &= \frac{V^{-1}E}{b} \\ R_0 &= \frac{b}{c} & \sigma_0^2 &= \frac{1}{c} & \omega_0 &= \frac{V^{-1}1}{c} \end{aligned}$$

La determinazione di x attraverso una combinazione lineare di altri due vettori di pesi appartenenti a due portafogli distinti, segna un punto di incontro con la frontiera stabilita da Markowitz. Dati due distinti portafogli infatti, l'intera frontiera è rappresentabile come combinazione lineare di questi due portafogli. Questo avviene per il teorema dei due fondi, il quale dice che un investitore può accedere a qualunque opportunità efficiente di investimento purché possa investire in due fondi di investimento i cui portafogli siano efficienti. Il seguente grafico chiarirà il concetto:

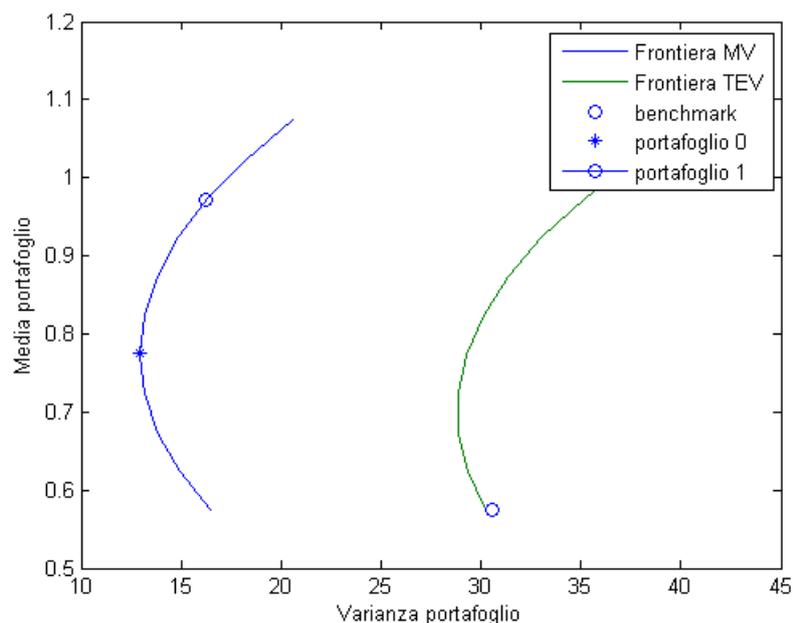


Figura 4: frontiera MV e frontiera TEV

Da questo si può notare come l'area situata a sinistra del pallino, che individua il benchmark, contenga i portafogli che dominano lo stesso, ma bisogna tener presente che solo sulla frontiera TEV essi saranno anche efficienti. È evidente che i portafogli dominanti il benchmark siano caratterizzati da volatilità inferiore al benchmark e, talvolta, da un rendimento atteso superiore.

21

Quindi, riesaminando il problema di minimo di Roll, risulterà che la frontiera TEV sarà:

$$\begin{aligned}
 V_P &= \text{Var}(R_P) = q'_P V q_P \\
 &= V_B + 2x'Vq_B + x'Vx \\
 &= V_B \frac{2(E_P - E_B)(cE_B - b)}{ac - b^2} + \frac{c(E_P - E_B)^2}{ac - b^2}.
 \end{aligned}$$

Effettuando le sostituzioni $d = \frac{ac - b^2}{c}$ e $\delta_1 = E_B - \frac{b}{c}$ all'equazione, si ottiene l'equivalente in termini di G :

$$V_P = V_B + \frac{2\delta_1(E_P - E_B)}{d} + \frac{(E_P - E_B)^2}{d} = V_B + \frac{2\delta_1 G + G^2}{d}$$

Per quanto riguarda invece la frontiera media-varianza di Markowitz, MV , essa viene definita da un'equazione indipendente dal benchmark:

$$V_{P,MV} = \frac{cE_P^2 - 2bE + a}{ac - b^2},$$

$$a > 0, b > 0, ac - b^2 > 0.$$

Per evidenziare la distanza che intercorre tra la frontiera MV e TEV si presenta la precedente equazione in funzione di G :

$$V_{P,MV} = \frac{(E_P - E_B)^2 + 2\delta_1(E_P - E_B) + \delta_1^2}{d} + \frac{1}{c} = \frac{(G + \delta_1)^2}{d} \frac{1}{c}.$$

Come scritto precedentemente, il benchmark è situato sulla frontiera TEV ed è solitamente inefficiente. La distanza tra tale frontiera da quella efficiente è pari alla differenza tra la varianza dell'indice di riferimento e la varianza di un portafoglio efficiente con lo stesso rendimento atteso. Nel metodo di Roll, il portafoglio gestito sarà inefficiente quanto lo è il benchmark, ma, qualora il rendimento del benchmark R_B fosse maggiore del rendimento del portafoglio di varianza minima globale (R_0) e $G > 0$, il portafoglio gestito avrà sia un rendimento più elevato sia una maggiore volatilità rispetto al benchmark. Tuttavia, se il benchmark fosse inefficiente e il suo rendimento atteso R_B inferiore a R_0 il portafoglio gestito potrebbe dominare il benchmark. Inoltre, il portafoglio gestito potrebbe avere sia un rendimento atteso superiore sia una volatilità complessiva inferiore se $R_B < R_0$ e G non fosse troppo grande. Ponendo il rendimento atteso del portafoglio MV pari al rendimento atteso del benchmark, E_B , la differenza tra le due frontiere risulta costante rispetto a G e viene espressa come:

$$distanza = V_B - V_{P,MV} = V_B - \frac{cE_B^2 - 2bE_B + a}{ac - b^2}.$$

Il problema principale di questo approccio è il fatto che trascuri il rischio assoluto di portafoglio. Per superare questo inconveniente Roll decise di introdurre un ulteriore vincolo. Nell'articolo del 1992 infatti, sottolinea che molti manager non mostrino le distorsioni sistematiche rispetto al benchmark nei vari movimenti in rialzo o in ribasso del mercato e per una maggiore trasparenza della gestione finanziaria sarebbe opportuno imporre loro di mantenere il cosiddetto "beta" del portafoglio gestito entro un certo intervallo, ad esempio 0,95 – 1,05.

È necessario considerare due componenti di rischio in un portafoglio finanziario:

- Rischio complessivo;
- Rischio sistematico (di mercato).

Il rischio complessivo rappresenta la variabilità totale dei rendimenti ed è misurato dalla deviazione standard dei rendimenti. Il rischio sistematico, detto anche β , evidenzia la sensibilità del portafoglio rispetto ai movimenti di mercato, o di un benchmark, e serve a distinguere l'abilità di un gestore dalla sua propensione al rischio. Si ritiene che un investitore dovrebbe venir compensato in base a tale misura. Il β costituisce quella parte di rischio non diversificabile di un portafoglio e rappresenta la componente principale di rischiosità di un fondo comune. Il β determina se il fondo sia più rischioso o meno rischioso del benchmark: ad un valore di β elevato corrisponde un rischio sopportato superiore. Il rischio sistematico β viene così definito:

$$\beta_{PB} = \frac{cov(R_P, R_B)}{V_B}.$$

Se il coefficiente fosse uguale ad 1, la volatilità dei titoli oggetto di investimento sarebbe uguale a quella del mercato. I titoli più rischiosi invece, presentano un β superiore a 1 perciò qualora ci fossero delle variazioni nel mercato pari al 2% in rialzo o in ribasso e $\beta=2$, gli investimenti si muoveranno del 4% in rialzo o in ribasso. Al

contrario, la gestione dei titoli del portafoglio con β compresi tra 0 e 1 risulta meno rischiosa del benchmark. Se β fosse pari a zero il portafoglio non presenterebbe alcuna correlazione con il mercato. È possibile che β sia negativo e questo starebbe a significare che i titoli tenderebbero a muoversi in direzione opposta rispetto al mercato. Considerando nuovamente la figura 4, i portafogli che dominano il benchmark possiedono tutti un livello di beta inferiore all'unità. D'altronde, un manager con l'intenzione di minimizzare la TEV deve scegliere una composizione di assets con l'indicatore $\beta > 1$. Se il rendimento atteso dell'indice di riferimento fosse superiore al rendimento del portafoglio con varianza minima globale, il portafoglio gestito (P) non potrebbe dominare il benchmark e, inoltre, esisterebbero portafogli con la stessa volatilità di P e rendimenti attesi più grandi. Si introduce di seguito un vincolo al problema 1.1:

$$\beta = \beta_{PB} = \frac{(x + q_B)'Vq_B}{V_B} = \frac{x'Vq_B}{V_B} + 1$$

In questo vincolo, assunto G positivo, si nota come il valore di β sarà maggiore o minore di uno in base a quanto inefficiente sarà il benchmark. Si può affermare che un investitore applicherà una gestione attiva con andamenti di mercato in crescita riducendo al minimo il TEV e massimizzando la performance attesa. Si avrà un β del portafoglio gestito non unitario qualora l'extra-performance attesa non sarà zero, a meno che il rendimento atteso del benchmark sia uguale a quello del portafoglio di minima varianza globale, situazione improbabile e per questo chi seguirà un modello TEV avrà un β non unitario. Considerando quindi l'introduzione del rischio sistematico β , il problema di minimo sarà:

$$\begin{aligned} \min_x \text{Var}(TE) &= x'Vx' \\ \text{s.t. } &\begin{cases} \frac{x'Vq_B}{V_B} + 1 = \beta \\ x'E = G \\ x'1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Successivamente viene presentata la soluzione in termini di differenza dei pesi del portafoglio e del benchmark:

$$x = q_P - q_B = \gamma_1 \frac{V^{-1}E}{b} + \gamma_0 \frac{V^{-1}1}{c} + \gamma_B q_B$$

dove γ_1 , γ_0 e γ_B sono degli scalari dati da:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= b \frac{\delta_2(E_P - E_B) - \delta_1 V_B(\beta - 1)}{d\delta_2 - \delta_1^2}, \\ \gamma_0 &= \frac{(E_P - E_B)(E_B - bV_B) + (bE_B - a)V_B(\beta - 1)}{d\delta_2 - \delta_1^2}, \\ \gamma_B &= \frac{-\delta_1(E_P - E_B) + dV_B(\beta - 1)}{d\delta_2 - \delta_1^2}, \end{aligned}$$

25

in cui:

(1.2)

$$\begin{aligned} a &= E'V^{-1}E \quad b = E'V^{-1}1 \quad c = 1'V^{-1}1, \\ \delta_1 &= E_B - \frac{b}{c} \quad \delta_2 = V_B - \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Come precedentemente mostrato, è possibile usare la (1.2) in funzione dei portafogli di varianza minima globale e di intersezione della frontiera efficiente di Markowitz:

$$x = \gamma_1 \omega_1 + \gamma_0 \omega_0 + \gamma_B q_B$$

$$s.t \begin{cases} \gamma_1 + \gamma_0 + \gamma_B = 0 \\ \gamma_1 R_1 + \gamma_0 R_0 + \gamma_B R_B = G \end{cases}$$

Si nota come in questa soluzione la frontiera *beta TEV* sia definita sia dalla combinazione lineare di due portafogli appartenenti alla frontiera di Markowitz sia dal benchmark. Si ottiene, quindi, una separazione di tre fondi.

L'equazione che definisce la frontiera di minima varianza *beta TEV* si ottiene in questo modo:

$$\begin{aligned} V_P &= V(R_P) = q'_P V q_P \\ &= V_B + 2x'Vq_B + x'V \\ &= V_B + 2V_B(\beta - 1) \\ &+ \frac{\delta_2(E_P - E_B)^2 - 2\delta_1(E_P - E_B)V_B(\beta - 1) + dV_B^2(\beta - 1)^2}{d\delta_2 - \delta_1^2} \end{aligned}$$

Precisamente dal vincolo aggiuntivo si ottiene: $x'Vq_B = V_B(\beta - 1)$.

Philippe Jorion è un altro studioso della tematica del tracking error nella portfolio optimization. Jorion (2003), infatti, esplora la relazione tra il rischio e il ritorno di portafogli gestiti in maniera attiva soggetti a un vincolo sul tracking error volatility (TEV). Il problema in questo setup è il fatto che i portfolio manager non prestino attenzione al rischio totale di portafoglio, a meno che non siano introdotti vincoli addizionali. Anche Roll (1992) affermò che l'ottimizzazione del surplus porti sistematicamente ad un più alto rischio del portafoglio attivo rispetto al benchmark e che non sia ottimale. Jorion considera un portfolio manager al quale è stato dato l'obiettivo di battere il benchmark. Potrebbe essere più opportuno confrontare la volatilità complessiva del portafoglio con la volatilità del benchmark invece che valutare il rischio sopportato dall'asset manager usando il TEV. Nonostante ciò, l'asset management continua a mantenere l'enfasi sul TE risk control, perciò Jorion ha

cercato di correggere il problema dei portafogli con più alta varianza rispetto al benchmark, aggiungendo un vincolo che forzi la volatilità del portafoglio ad essere uguale a quella dell'indice, cioè:

$$\sigma_P^2 = \sigma_B^2.$$

Prima di imporre questo ulteriore vincolo, Jorion analizza la forma della frontiera TEV-constrained nello spazio media-varianza. Per riassumere i risultati ottenuti, bisogna introdurre le seguenti notazioni:

- \mathbf{q} : vettore dei pesi del benchmark;
- \mathbf{x} : deviazioni dal benchmark;
- $\mathbf{q}_P = \mathbf{q} + \mathbf{x}$: vettore dei pesi del portafoglio;
- \mathbf{E} : vettore dei ritorni attesi;
- \mathbf{V} : matrice della covarianza;
- $\boldsymbol{\mu}_B = \mathbf{q}'\mathbf{E}$: ritorni attesi del benchmark;
- $\sigma_B^2 = \mathbf{q}'\mathbf{V}\mathbf{q}$: varianza attesa dei rendimenti del benchmark;
- $\boldsymbol{\mu}_E = \mathbf{x}'\mathbf{E}$: surplus atteso del portafoglio;
- $\sigma_E^2 = T = \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x}$: varianza del Tracking Error;
- $\boldsymbol{\mu}_P = (\mathbf{q} + \mathbf{x})'\mathbf{e} = \boldsymbol{\mu}_B + \boldsymbol{\mu}_E$: rendimento atteso portafoglio;
- $\sigma_P^2 = (\mathbf{q} + \mathbf{x})'\mathbf{V}(\mathbf{q} + \mathbf{x})$: varianza attesa del portafoglio.

Inoltre, il problema di ottimizzazione può essere scritto come segue:

$$\begin{aligned} & \max \mathbf{x}'\mathbf{E} \\ & s. t. \begin{cases} \mathbf{x}'\mathbf{1} = 0 \\ \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} = T \\ (\mathbf{q} + \mathbf{x})'\mathbf{V}(\mathbf{q} + \mathbf{x}) = \sigma_P^2 \end{cases} \end{aligned}$$

dove:

- Il primo vincolo stabilisce che la somma delle deviazioni del portafoglio sia uguale a zero;
- Il secondo vincolo stabilisce il TEV ad un numero fisso T ;
- Il terzo vincolo forza la varianza totale del portafoglio ad essere uguale al valore fisso σ_P^2 .

Jorion ha trovato che la constant TEV frontier sia un'ellisse nello spazio media-varianza come evidenziato nella figura 5.

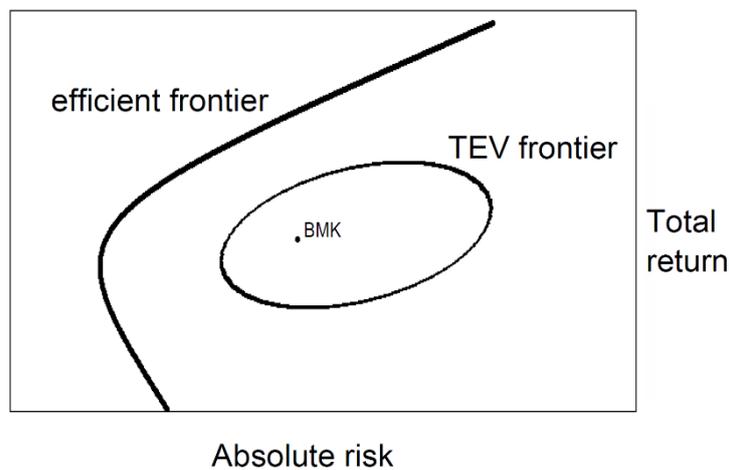


Figura 5: frontiera efficiente e frontiera vincolata TEV.
Fonte: (Ricchetti, 2010)

Una caratteristica dell'ellisse è che essa sia centrata su μ_B sull'asse verticale e su $\sigma_B^2 + T$ sull'asse orizzontale. Inoltre l'asse principale dell'ellisse ha un'inclinazione positiva quando $\mu_B - \mu_{MV} > 0$, mentre ha un'inclinazione negativa quando $\mu_B - \mu_{MV} < 0$ ed è orizzontale quando $\mu_B = \mu_{MV}$ (Jorion, 2003). μ_{MV} è il ritorno atteso del minimum variance portfolio ed è uguale a $-\frac{b}{c}$ con $b = e'V^{-1}1$ e $c = 1'V^{-1}1$. Altro aspetto importante è:

$$\sigma_P^2 = \sigma_B^2 + T + 2\Delta_1 \sqrt{\frac{T}{d}}$$

dove:

- $d = \frac{a-b^2}{c}$;

- $a = e'V^{-1}e;$
- $\Delta_1 = \mu_B - \mu_{MV}.$

Da qui è possibile notare che il rischio del portafoglio aumenti non solo direttamente con il TEV, ma anche con la quantità $\Delta_1 = \mu_B - \mu_{MV}.$

Si giunge quindi alla formula della constant TEV frontier:

$$dy^2 + 4\Delta_2z^2 - 4\Delta_1zy - 4T(d\Delta_2 - \Delta_1^2) = 0$$

definendo $y = \sigma_P^2 - \sigma_B^2 - T$ e $z = \mu_P - \mu_B$ e $\Delta_2 = \sigma_B^2 - \sigma_{MV}^2$ dove la varianza del minimum variance portfolio è $\sigma_{MV}^2 = -\frac{1}{c}$. Dopo questa analisi della constant TEV frontier nello spazio media-varianza, Jorion, come è stato scritto, applica un altro vincolo al problema di ottimizzazione in modo da forzare la volatilità totale del portafoglio ad essere uguale a quella del benchmark: $\sigma_P^2 = \sigma_B^2$. Grazie alla forma piatta dell'ellisse, l'aggiunta del suddetto vincolo può migliorare sostanzialmente la performance del portafoglio. Questo vincolo è più vantaggioso in situazioni di bassi valori di TEV, o quando il benchmark è relativamente inefficiente.

Ricapitolando, quindi, molti gestori di portafoglio valutano la performance del loro fondo confrontandolo con uno specifico benchmark. Una misura del rischio di un portafoglio rispetto un benchmark è appunto il TE. Esso può derivare dai pesi del portafoglio e del benchmark e dalla matrice di covarianza stimata. Dall'analisi del TE si distingue quindi una gestione attiva qualora si abbiano elevati scostamenti rispetto al benchmark, e una gestione passiva quando ci si limiti a replicare le performance del benchmark.

Inoltre viene anche misurata la volatilità del tracking error (TEV) che rappresenta la rischiosità differenziale che l'investitore sopporta scegliendo di investire sul fondo invece che nel benchmark.

Viene di seguito presentato il modello di riferimento utilizzato per ottenere la selezione di portafoglio finanziario in questo elaborato. Jansen e van Dijk (2002) affermano che i manager di portafogli sia passivi che attivi potrebbero preferire la detenzione di un numero limitato di titoli. In questo modo si previene nel detenere molte posizioni piccole e illiquide e si limitano i costi di transizione e di amministrazione. Inoltre, Jansen e van Dijk hanno come obiettivo principale quello di minimizzare il TE con un numero limitato di azioni. Il risultato della loro ricerca permette di risolvere i problemi di costruzione del portafoglio che incorporano dei vincoli.

Prendendo ad esempio come benchmark lo S&P 100, si supponga di voler costruire un portafoglio di soli 20 titoli che abbia un TE minimo rispetto l'indice e la somma delle percentuali dei pesi uguali ad 1. Si supponga inoltre che non ci siano altre restrizioni. La costruzione del portafoglio A si suddivide in 4 steps. Nel primo, il portafoglio A è costruito cosicché esso minimizzi il TE attraverso la detenzione delle 80 più grandi azioni in termini di capitalizzazione. Successivamente, si costruisce un portafoglio B per poter minimizzare il TE detenendo le 60 azioni più grandi del portafoglio A. Il terzo step consiste nel formare un portafoglio C con le 40 più grandi azioni del portafoglio B, e infine, il portafoglio che detiene le 20 più grandi azioni del portafoglio C (Jansen & Van Dijk, 2002). Il metodo utilizzato è il sequential quadratic optimization che consiste in un metodo iterativo per problemi di ottimizzazione non lineare. Si viene a creare così un portafoglio con minor TE rispetto a un metodo one-step. Come si può notare dalla tabella di seguito riportata, il TE si può abbassare man mano che si aggiungono degli step al processo di eliminazione delle più piccole azioni e ottimizzazione del portafoglio.

Number of steps	TE (% yearly)
1	2,427
2	2,375
4	2,248
8	2,032
20	1,951
40	1,946
80	1,923

Si riscontrano delle difficoltà nel trovare il portafoglio ottimo, in quanto il tempo impiegato nel trovare il più basso TE tra le numerose possibilità di scegliere 20 azioni su 100 azioni, pari a $\binom{100}{20}$, è elevatissimo. Il TE di un certo portafoglio con un vettore pesi h può essere espresso come una funzione quadratica in h , che chiameremo $TE(h)$. Imponendo come vincolo il numero di azioni da contenere nel portafoglio, l'impedimento di shorting e la somma delle percentuali uguale ad 1, si avrà che:

31

$$\begin{aligned}
& \min_h TE(h) \\
& s. t \quad \sum_{i=1}^{100} h_i = 1 \\
& |\{i | h_i > 0\}| = 20 \\
& h_i \geq 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Il primo vincolo stabilisce che la somma dei pesi sia equivalente ad 1 ed il terzo vincolo rappresenta l'impossibilità di vendite allo scoperto. Per quanto riguarda il secondo vincolo, essendo discontinuo, non può essere affrontato usando metodi standard per la suddetta funzione quadratica. Per questo motivo è stato introdotto un nuovo metodo per poter incorporare questo vincolo:

$$\begin{aligned} \min_h TE(h) + c|\{i|h_i > 0\}| \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^{100} h_i = 1 \\ h_i \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

È stato introdotto un trade-off tra il TE e il numero di azioni nel portafoglio ed è ora possibile provare matematicamente che c'è un valore di c per il quale la soluzione ottima h del nuovo metodo (2) è anche la soluzione ottima per il modello precedente (1). Questo passaggio ha bisogno di una dimostrazione matematica per poter capire al meglio come si è giunti alla suddetta conclusione.

Per generalizzare la notazione, vengono impostati k al posto di 20 e N invece che 100, così i problemi (1) e (2) risulteranno:

$$\begin{aligned} \min_h TE(h) \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^N h_i = 1 \\ |\{i|h_i > 0\}| = k \\ h_i \geq 0 \end{aligned} \quad (1A)$$

e

$$\begin{aligned} \min_h \lim_{p \downarrow 0} (TE(h) + c \sum_{i=1}^N h_i^p) = \\ = \min_h TE(h) + c|\{i|h_i > 0\}| \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^N h_i = 1 \\ h_i \geq 0 \end{aligned} \quad (2A)$$

Il primo passo nella prova è quello di mostrare che per ogni c la soluzione ottima \underline{x} del limite (2A) equivalga a uno dei vettori x^1, \dots, x^N dove x^i è la soluzione ottima di (1A) per $k = i$. Definito $j = |\{i | \underline{x}_i > 0\}|$, dove \underline{x} è la soluzione ottima di (2A) per un valore arbitrario ma fissato di c , dovrebbe essere provato che \underline{x} equivalga a x^j dal momento che questo è l'unico candidato che potrebbe essere uguale a \underline{x} all'interno dello spazio delle soluzioni x^1, \dots, x^N di (1A). Per definizione, x^j è la soluzione al problema (1A) per $k = j$. Poiché cj è costante, in quanto $c > 0$ è fissato e j è definito, x^j risulta anche essere la soluzione al seguente problema:

$$\begin{aligned} \min TE(h) + cj &= \min TE(h) + c|\{i | h_i > 0\}| \\ \text{s. t. } |\{i | h_i > 0\}| &= j \\ \sum_{i=1}^N h_i &= 1, h_i \geq 0. \end{aligned} \tag{3A}$$

Senza il vincolo $|\{i | h_i > 0\}| = j$ il problema (3A) risulta essere identico al problema (2A), il quale per definizione ha come soluzione ottima \underline{x} . Aggiungendo il vincolo alla (2A), la soluzione \underline{x} rimane adatta e ottimale, così \underline{x} è anche una soluzione ottima di (3A). Assunto che le soluzioni ai problemi (2A) e (1A) siano uniche, \underline{x} e x^j sono perciò uguali. Per questo, il valore della funzione obiettivo di qualsiasi possibile soluzione ottimale di (2A) per un certo valore di c può essere espresso come $f(x^n) + c|\{i | x^i > 0\}|$ per un certo $n \in \{1, \dots, N\}$. Il secondo step della prova è consiste nel mostrare che tutti questi N valori possibili delle funzione obiettivo possono essere ottimali per un certo valore scelto di c . Si assume che $f(x^n)$ sia decrescente e convessa in n . La prima assunzione rappresenta il fatto che il Tracking error sarà minore per un numero crescente di assets ammessi nel tracking portfolio. La seconda assunzione riguarda la convessità del TE come una funzione del numero di assets nel TE portfolio. Per questa funzione decrescente e discreta, si definisce quindi la convessità come $f(x^n) - f(x^{n+1}) < f(x^{n-1}) - f(x^n)$ per tutti gli n . L'espressione

$c|\{i|x^i > 0\}| = cn$ è crescente in n . Viene dimostrato quindi che c può essere scelto affinché, per un arbitrario numero intero i , si ottenga:

$$\min_n f(x^n) + cn = f(x^i) + ci.$$

Se $f(x^n)$ fosse una funzione continua in n allora, scegliendo una derivata negativa di f per c , si otterrebbe come soluzione ottimale x^i . Siccome la seconda derivata, $cf(x^i)$, è positiva per la convessità, $f(x^i) + ci$ è quindi il minimo valore della funzione obiettivo. Alla fine di tutto questo procedimento, Jansen e van Dijk hanno provato che scegliendo c uguale a $-(f(x^{i+1}) - f(x^{i-1}))/2$ si otterrà che x^i sarà la soluzione ottima. Con questi due step si è dimostrato che la soluzione ottimale del problema (1A) può essere ottenuta trovando la soluzione ottimale del problema (2A) scegliendo un opportuno valore di c .

Ritornando al problema di ottimizzazione (2), il termine discontinuo è presente nella funzione obiettivo, il quale rende impossibile l'ottimizzazione nella pratica. Jansen e van Dijk (2002) sono riusciti a risolvere questo problema dimostrando che:

$$\lim_{p \downarrow 0} \sum_{i=1}^{100} h_i^p = |\{i|h_i > 0\}|. \quad (3)$$

Si ha quindi che la funzione continua:

$$\sum_{i=1}^{100} h_i^p$$

rappresenti una buona approssimazione del vincolo discontinuo $|\{i|h_i > 0\}|$. Da notare che il termine alla sinistra dell'equazione (3), preso alla potenza di $1/p$, è la misura per la diversità del portafoglio come introdotto da Fernholz, Garvy, and Hannon nel 1998. Così il problema di ottimizzazione può essere scritto come:

$$\begin{aligned} \min_h TE(h) + c \sum_{i=1}^{100} h_i^p \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^{100} h_i = 1 \quad (4) \\ h_i \geq 0 \end{aligned}$$

Da questa formulazione è evidente un trade-off tra diversità del portafoglio e il TE. È più probabile che quando p sia troppo grande e quando venga dato un certo numero di assets, i portafogli ugualmente pesati saranno discriminati perché hanno un'alta diversità. Perciò, una misura conveniente di diversità p in questo contesto dovrebbe essere vicina allo zero cosicché i portafogli con lo stesso numero di titoli avranno diversità simile. In questo caso, la soluzione ottima di (4) dovrebbe coincidere con la soluzione ottima di (1) che è quella che si sta cercando. Nella pratica però p non dovrebbe essere troppo piccolo. Per un valore troppo piccolo di p , infatti, la funzione obiettivo diverrebbe troppo piatta e l'algoritmo non riuscirebbe a trovare una buona direzione di ricerca. Perciò p deve essere scelto per essere più grande, ma in questo caso l'ottimizzazione non raggiungerebbe l'esatta soluzione ottima originale. In primo luogo viene applicato per il calcolo del Tracking Error, il diversity method, che consiste in due step. Il primo in cui l'ottimizzazione (4) dovrebbe scegliere i giusti titoli da inserire nel TE portfolio ed il secondo in cui, successivamente a questa ottimizzazione, dati i titoli trovati, il risultato viene migliorato grazie ad un'ottimizzazione quadratica del portafoglio.

Jansen e van Dijk utilizzano quindi due metodi per calcolare il TE, quello originale, il Sequential Quadratic Optimization, e il Diversity Method. I risultati emersi dallo studio di Jansen e van Dijk vengono riportati di seguito:

Numero di titoli nel Portafoglio	Sequential Quadratic Optimization	Diversity Method
<u>Risultati per FTSE 100</u>		
20	2,095	1,960
40	1,062	1,011
60	0,538	0,438
<u>Risultati per S&P 100</u>		
20	1,924	1,828
40	0,558	0,554
60	0,201	0,208

Essi mostrano come il Diversity Method produca risultati leggermente migliori del Sequential Quadratic Optimization. Si potrebbe quindi dire che il Diversity Method sia più performante del Sequential Method. Tutti i vincoli quali costi di transazione, pesi, numero minimo di titoli nel portafoglio, che possono essere fatti per lo standard Sequential Method, possono essere anche imposti al Diversity Method. Perciò l'estensione dell'ottimizzazione di portafoglio alla struttura della diversità comporta dei vantaggi. Infatti il TE risultante dal portafoglio dopo l'ottimizzazione è generalmente più basso rispetto al corrente metodo Sequential Quadratic Optimization. È necessario anche tenere conto che il Sequential Quadratic Optimization Method sia standard e meno faticoso da attuare. Dati i risultati però, se ottenere un basso TE per un fund manager e avere a disposizione delle buone stime di covarianza è importante, l'applicazione del Diversity Method può valere la pena dello sforzo. Per di più il Diversity Method ha molto potenziale per future ricerche, infatti presenta migliori algoritmi di ottimizzazione, migliori valori iniziali nel processo di ottimizzazione e migliori scelte per i parametri che permetteranno di raggiungere notevoli risultati. Il Diversity Method raggiunge così sia un più basso tracking error sia una migliore stima dello scostamento dal valore ottimo.

CAPITOLO 2

Particle Swarm Optimizations per la soluzione del problema di minimizzazione

Nel seguente capitolo verrà trattato l'algoritmo Particle Swarm Optimization, metaeuristica di origine biologica, e i suoi aspetti fondamentali. Successivamente viene introdotta la PSO all'interno di problemi di ottimizzazione vincolata in modo da renderla più attinente al nostro problema di ottimizzazione.

2.1 Particle Swarm Optimization

Per risolvere il problema di ottimizzazione del portafoglio, in cui si considera il tracking error, si userà la metaeuristica Particle Swarm Optimization (PSO). Dato uno specifico problema di ottimizzazione, si definisce meta-euristica un algoritmo che approfondisce la ricerca della soluzione ottima nelle zone più "promettenti" dello spazio delle soluzioni. La PSO è un algoritmo iterativo di ispirazione biologica di tipo population-based che si rifà al comportamento sociale degli stormi di uccelli o dei banchi di pesce. Infatti, un insieme di regole semplici stabiliscono il comportamento di questi gruppi di animali. La PSO prevede la generazione e la gestione di un insieme di soluzioni chiamato *popolazione*. Rappresenta inoltre una tecnica per la ricerca degli ottimi non vincolati. Inizialmente, la PSO viene creata da J. Kennedy e R. Eberhart nel 1995; essa era stata utilizzata per simulare graficamente la coreografia degli stormi di uccelli e per scoprire le regole sottostanti al loro modo di volare in sincronia, cambiare direzione improvvisamente, disperdersi per poi riunirsi. Solo successivamente è stata utilizzata come strumento per risolvere problemi di ottimizzazione. Le radici della PSO risiedono quindi nei processi naturali di gruppi di animali, in questo caso stormi di

uccelli o banchi di pesce, e ciò conduce l'algoritmo all'interno della Swarm Intelligence.

La Swarm Intelligence (SI) è una famiglia di tecniche dell'intelligenza artificiale basata sullo studio di comportamenti collettivi in sistemi decentralizzati e auto organizzati. Essi sono costituiti da una popolazione di agenti i quali interagiscono tra di loro e con il loro ambiente e sono denominati particelle. Il motivo della denominazione particelle risiede nel fatto che la loro velocità e la loro accelerazione, quantità che misurano come le particelle si muovono nello spazio delle soluzioni, sono più appropriate ad esse (Kennedy & Eberhart, 2011). Ciascuna particella rappresenta una possibile candidata soluzione ed ha associato un valore, chiamato fitness value, che indica la sua qualità. Ogni particella inoltre è caratterizzata da una posizione. La soluzione di un generico problema di ottimizzazione mediante questo approccio deriva dall'interazione sociale di queste particelle, in quanto riusciranno ad affrontare il problema solo come gruppo. Riportando l'attenzione al mondo animale, da dove deriva la PSO, ogni uccello facente parte di uno stormo deve perseguire in maniera ottimale la ricerca di cibo, la fuga dai predatori e così via. Per soddisfare questi obiettivi utilizza informazioni relative alla propria velocità e posizione e alle direzioni e velocità prese dalla popolazione. Inoltre, il volatile stabilisce il suo comportamento in base a quello degli altri, deve quindi seguire i propri vicini, evitare di urtarli e restare nello stormo. Una singola particella, in questo caso un volatile, quando scorge una fonte di cibo, quindi un obiettivo da raggiungere, può dare atto a due modalità. La prima è l'individualismo, cioè allontanarsi dal gruppo per raggiungerla; la seconda è la socialità, rimanendo all'interno del gruppo. Si può quindi distinguere una strategia di ricerca basata sull'esplorazione, legata all'individualismo del singolo, ed una basata sullo sfruttamento, connessa alla socialità e quindi all'utilizzo dei successi di altri individui.

Qualitativamente parlando, un numero prefissato di particelle sono inizialmente posizionate in modo casuale all'interno dello spazio delle soluzioni ammissibili;

quest'ultima rappresenta un'area di ricerca della soluzione ottima. Ogni particella della popolazione esplora l'area di ricerca e determina il proprio successivo movimento considerando la propria posizione corrente, la propria migliore posizione passata, chiamata personal best fitness, e la migliore posizione passata dello sciame, detta global best fitness, il tutto scambiando queste informazioni con le altre particelle vicine del gruppo. Come detto precedentemente, la qualità di una posizione, possibile soluzione, viene definita dalla funzione di fitness. In questo modo si avrà che l'intero gruppo tenderà a dirigersi verso la migliore posizione individuata globalmente grazie all'interazione tra le particelle.

Bisogna tenere conto che il gruppo è caratterizzato da tre elementi:

- Robustezza: qualora ci sia un membro dello stormo che si allontana, il resto del gruppo esegue lo stesso il compito;
- Flessibilità: si possono risolvere diversi problemi applicando le stesse regole d'interazione tra gli individui;
- Auto-organizzazione: il comportamento articolato del gruppo è sorretto da regole semplici.

Dal punto di vista quantitativo, la PSO è caratterizzata da M particelle dove ognuna rappresenta una possibile soluzione, da N variabili del problema di ottimizzazione e dalla fitness function $f: S \in R^n \rightarrow R$ che individua la bontà della posizione dell'i-esima particella. Ciascuna particella è a sua volta caratterizzata all'iterazione k da:

- x_j^k : posizione attuale della j-esima particella al tempo k;
- v_j^k : velocità attuale della j-esima particella al tempo k;
- p_j : migliore posizione passata della j-esima particella.
- $f(x_j^k)$: valore di bontà della posizione attuale;
- $pbest_j = f(p_j)$: il valore della fitness function nella migliore posizione passata dalla j-esima particella.

L'introduzione dell'ultimo punto è fondamentale in quanto lo scopo è quello di battere il precedente $pbest_j$, in modo da trovare una nuova migliore posizione e quindi soluzione.

L'algoritmo originale della PSO ideato da Kennedy ed Eberhart si sviluppa in 8 fasi:

1. Inizializzare una popolazione di particelle nello spazio di ricerca con posizioni e velocità casuali;
2. Inizio delle iterazioni:
3. Valutare la fitness function $f(x_j^k)$ nella posizione attuale x_j^k per ogni particella;
4. Confrontare la fitness function trovata con il $pbest_j$. Nel caso in cui il valore corrente sia migliore del $pbest_j$, bisogna aggiornarlo con il valore corrente;
5. Individuare la particella nelle vicinanze con il migliore valore della fitness function globalmente e assegnarle l'indice g (global):
6. Aggiornare la velocità e la posizione delle particelle secondo questa equazione:

$$\begin{cases} v_j^{k+1} = v_j^k + U(0, \phi_1) \otimes (p_j - x_j^k) + U(0, \phi_2) \otimes (p_g - x_j^k) \\ x_j^{k+1} = x_j^k + v_j^{k+1} \end{cases}$$

dove:

- $U(0, \phi_1)$, $U(0, \phi_2)$ rappresentano dei vettori di numeri casuali distribuiti uniformemente in $[0, \phi_1]$ e $[0, \phi_2]$ e ϕ_1 , ϕ_2 sono dei coefficienti di accelerazione;
 - \otimes è il prodotto tensoriale, operatore bilineare;
7. Qualora il numero massimo di iterazioni o un valore accettabile della fitness function venisse raggiunto, si può passare alla fase 8, altrimenti si è costretti a ritornare al punto 3 (criterio di stop);
 8. Fine delle iterazioni.

La formula presentata precedentemente al punto 6 tiene in considerazione i seguenti elementi:

- Velocità corrente v_j^k Distanza della posizione attuale dalle posizioni passate visitate;
- Passata esperienza di ciascuna particella $U(0, \phi_1) \otimes (p_j - x_j^k)$;
- Collaborazione di ciascuna particella con il gruppo $U(0, \phi_2) \otimes (p_g - x_j^k)$.

Secondo Poli, Kennedy e Blackwell (2007) l'algoritmo della PSO necessita che siano fissati alcuni parametri. Il primo è la dimensione della popolazione, dove un numero di particelle tra 20 e 50 è comune nella pratica. I parametri ϕ_1 e ϕ_2 influenzano il comportamento della PSO determinando l'intensità delle forze che attraggono le particelle nella popolazione verso la migliore posizione visitata in passato e verso la miglior posizione visitata dalle particelle vicine. Come si può notare dalla formula infatti, la particella viene attratta sia da $(p_j - x_j^k)$, migliore posizione visitata della singola particella, che da $(p_g - x_j^k)$, migliore posizione visitata dalla collettività (Corazza, Fasano, & Gusso, 2013). Dalle prime ricerche della PSO, è stato assegnato alle due costanti di accelerazione il valore pari a due $\phi_1 = \phi_2 = 2$. In questo modo si evitava di rendere instabile l'algoritmo a causa di incrementi senza controllo delle velocità delle particelle. La tecnica proposta originalmente per fare questo, era quella di limitare le velocità in un intervallo $[-V_{max}, +V_{max}]$. La scelta del parametro V_{max} comporta dei problemi in quanto sembra che influenzi il bilanciamento tra esplorazione e sfruttamento. La massima velocità V_{max} viene usata come limite per controllare l'abilità di esplorazione globale di una particella. Un V_{max} grande facilita l'esplorazione globale, mentre un V_{max} piccolo incoraggia lo sfruttamento locale. Perciò, per eliminare il bisogno del V_{max} ed avere un maggiore controllo sull'esplorazione e lo sfruttamento, è stato introdotto un parametro, chiamato peso di inerzia w^k . L'introduzione del peso di inerzia w^k nell'algoritmo della PSO è avvenuta

nel 1998 da parte di Shi e Eberhart. Viene quindi inserito modificando la formula precedente nel seguente modo:

$$v_j^{k+1} = w^k v_j^k + U(0, \phi_1) \otimes (p_j - x_j^k) + U(0, \phi_2) \otimes (p_g - x_j^k)$$

La formula è equivalente a quella precedente, con l'aggiunta del peso di inerzia come fattore moltiplicativo di v_j^k . L'introduzione del peso di inerzia è fondamentale nell'equazione riportata di sopra. La giusta selezione del valore del peso di inerzia permette infatti di trovare il giusto trade-off tra l'esplorazione e lo sfruttamento locale e globale. Un peso di inerzia grande (ad esempio 0,9) rende la PSO come un algoritmo di ricerca globale, mentre un piccolo peso di inerzia (es. 0,4) facilita la ricerca locale. L'utilizzo del peso di inerzia w ha garantito un miglioramento delle performance in numerose applicazioni. Una delle soluzioni più promettenti per l'aggiornamento di w^k è la *linearly decreasing strategy* di w , secondo la quale il valore del peso di inerzia viene diminuito da 0,9 a 0,4 proporzionalmente al numero di iterazioni, permettendo di avere risultati eccellenti. Inizialmente bisogna intensificare la fase di esplorazione per individuare la zona più promettente, una volta individuata bisogna soffermarsi sull'esplorazione all'interno di questa area. Inoltre, i valori discussi precedentemente ϕ_1 e ϕ_2 , per poter raggiungere la convergenza dello stormo, devono avere un valore che sia in accordo con il valore del peso di inerzia w^k . Il valore di w^k , decrescente con l'aumentare del numero di iterazioni, viene stabilito dalla seguente formula:

$$w^k = w_{max} + \frac{w_{min} - w_{max}}{K} k$$

con K che rappresenta il numero massimo di iterazioni. Mentre per quanto riguarda w_{max} e w_{min} sono rispettivamente 0,9 e 0,4.

Un altro metodo per assicurare la convergenza delle particelle, cercare di prevenire l'esplosività della velocità ed eliminare il parametro V_{max} , è stato pensato da Clerc nel

1999. Il suo lavoro consiste nell'applicazione di un coefficiente di costrizione χ sulla formula della velocità. Clerc ha notato come ci possano essere molte possibilità di applicare il coefficiente di costrizione, ma uno dei più semplici metodi è il seguente:

$$v_j^{k+1} = \chi(v_j^k + U(0, \phi_1) \otimes (p_j - x_j^k) + U(0, \phi_2) \otimes (p_g - x_j^k))$$

dove:

- $\phi = \phi_1 + \phi_2 > 4$;
- $\chi = \frac{2}{\phi - 2 + \sqrt{\phi^2 - 4\phi}}$

Tipicamente, quando il metodo di costrizione di Clerc viene usato, ϕ è fissato a 4.1, $\phi_1 = \phi_2$ e il coefficiente χ è così 0,729. Algebricamente si può notare come la PSO con costrizione sia equivalente alla PSO con il peso di inerzia. Infatti la formula del peso di inerzia e la formula del coefficiente di costrizione possono essere trasformate l'una nell'altra.

Un ulteriore aspetto da considerare è la topologia dello stormo, cioè il modo in cui le particelle comunicano tra di loro. Esistono due possibili topologie:

- Statiche;
- Dinamiche.

La differenza tra le due è che in quelle statiche le particelle facenti parte dell'intorno di ogni altra particella non cambiano con l'aumentare delle iterazioni. Nella versione classica della PSO la topologia era considerata in modo statico e con gli anni anche questo aspetto dell'algorithm ha subito dei cambiamenti. Questi ultimi si sono diretti verso la topologia *lbest* (local best) che ha come vantaggio quello di permettere ricerche parallele, poiché sub popolazioni di particelle potrebbero convergere in diverse regioni dello spazio di ricerca. L'altra topologia è quella *gbest* (global best), dove ogni particella è influenzata dalle altre appartenenti allo stormo. Dato che la topologia di tipo *lbest* sembra essere migliore per l'esplorazione nello spazio di ricerca, mentre la *gbest* converge più velocemente, potrebbe essere una buona idea

iniziare la ricerca con una topologia di tipo *lbest* e lentamente aumentare la dimensione del vicinato, affinché la popolazione sia completamente connessa alla fine dell'iterazione. Alla fine del capitolo si tratteranno diverse modalità per espandere l'applicazione della meta-euristica PSO superando i problemi del sistema di vincoli.

2.2 Problemi vincolati ed eventuali soluzioni

A questo punto si rende necessario un meccanismo che riesca a gestire il sistema di vincoli in quanto, come detto precedentemente, la PSO rappresenta una tecnica per la ricerca degli ottimi non vincolati.

È stato provato che l'applicazione della PSO sui problemi di ottimizzazione libera è molto estesa ed è molto efficace. Nonostante ciò i problemi vincolati sono una nuova area per la PSO. Si può definire il problema di ottimizzazione non lineare vincolato (constrained nonlinear optimization problems CNOPs) come segue:

$$\begin{aligned} & \text{trovare } \vec{x} \text{ che ottimizza } f(\vec{x}) \\ \text{vincolato a: } & g_i(\vec{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(\vec{x}) = 0 \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

con:

- $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ rappresenta il vettore delle soluzioni;
- m numero vincoli espressi sotto forma di disuguaglianza;
- p numero vincoli espressi sotto forma di uguaglianza.

I CNOPs sono composti da tre componenti di base:

- Un insieme di variabili;
- Una funzione fitness da ottimizzare;

- Un insieme di vincoli che specifichino gli spazi possibili delle variabili.

Lo scopo è quello di trovare i valori delle variabili che ottimizzino la funzione di fitness mentre soddisfino il set di vincoli. Il punto chiave nei processi di ottimizzazione vincolati è quello di trattare con i vincoli. Molti metodi sono stati proposti a tal proposito: metodi basati sul mantenimento delle soluzioni ammissibili, sulle funzioni di penalità, metodi che mantengono una chiara distinzione tra soluzioni ammissibili e soluzioni inammissibili e altri metodi ibridi. Quindi, per i CNOPs, il metodo originale della PSO deve essere modificato per trattare con i vincoli.

Di seguito verranno trattati alcuni metodi per la risoluzione di CNOPs con l'utilizzo della PSO.

Il metodo più semplice risulta essere quello basato sul mantenimento dell'ammissibilità delle soluzioni. Esso consiste nella generazione di un insieme di soluzioni ammissibili e successivamente nel verificare se queste rispettino o no l'insieme di vincoli. Per trovare l'ottimo nello spazio delle soluzioni ammissibili, ogni particella cerca nell'intero spazio, ma prende traccia solo di quelle ammissibili. Inoltre, per poter accelerare il processo, tutte le particelle sono inizializzate come soluzioni ammissibili. Di seguito l'algoritmo presentato da Hu ed Eberhart (2002):

1. Inizia il ciclo;
2. Inizializzazione delle particelle;
3. Se tutte le particelle sono nello spazio ammissibile proseguire, altrimenti tornare al punto 2;
4. Termine del ciclo;
5. Inizio del ciclo;
6. Per ogni particella calcolare il valore della funzione di fitness $f(x_j)$;

7. Se il valore della funzione di fitness è migliore rispetto al miglior valore della funzione di fitness (pBest) e la particella è presente nello spazio delle soluzioni ammissibili, stabilire il valore corrente come il nuovo pbest;
8. Individuare la particella con il migliore fitness value di tutte le particelle come gbest;
9. Calcolare ed aggiornare la velocità e la posizione di ciascuna particella tramite:

$$\begin{cases} v_j = v_j + U(0, \phi_1) \otimes (p_j - x_j) + U(0, \phi_2) \otimes (p_g - x_j) \\ x_j = x_j + v_j \end{cases}$$
10. Quando il numero massimo di iterazioni o il valore della funzione di fitness, viene raggiunto, terminare il ciclo, altrimenti tornare al punto 6;
11. Fine del ciclo.

Questo algoritmo si differenzia dall'originale della PSO in due modi:

1. Durante l'inizializzazione, tutte le particelle sono ripetitivamente inizializzate affinché soddisfino tutti i vincoli;
2. Quando si calcola i valori del pBest e del gBest, si considerano solo le posizioni nello spazio delle soluzioni ammissibili.

L'algoritmo considerato si riferisce alla versione globale. Per quanto riguarda la versione locale, invece che trovare il *gBest*, ogni particella trova un *lbest* per aggiornare la nuova velocità.

Il problema di questo approccio è che potrebbe richiedere costi computazionali in alcuni casi molto alti. Si pensi ad un possibile caso in cui la generazione casuale di un milioni di posizioni sia insufficiente per produrre una singola soluzione ammissibile. Evidentemente, questi alti costi computazionali finiscono per essere impossibili da applicare nella realtà.

Un altro possibile approccio è basato sulla versione locale della PSO in cui si considerano le particelle nelle vicinanze e non l'intero stormo (global), quindi un

sottoinsieme dell'intero stormo determinato a sua volta in modo casuale (Cabrera & Coello, 2007). Nonostante l'esistenza di una varietà di topologie di popolazione, dove per topologia si intende lo studio delle proprietà degli spazi, Cabrera e Coello (2007) adottano una topologia di "vicinato" generata casualmente. Il loro approccio, inoltre, utilizza un processo di re-inizializzazione per mantenere la diversità della popolazione ed adotta un operatore mutazionale con lo scopo di aumentare le capacità di esplorazione della PSO. Questo approccio viene chiamato micro-PSO proprio per l'utilizzo di una popolazione piccola, di 5 particelle.

Parlando del trattamento dei vincoli, Cabrera e Coello (2007) hanno adottato un meccanismo di selezione delle particelle leader di ciascun sottoinsieme di popolazione che si basa sia sulle soluzioni ammissibili sia sul valore della funzione di fitness di una particella. Quando due soluzioni ammissibili vengono confrontate, quella con il valore della funzione di fitness più alto vince. Se una soluzione è inammissibile e un'altra è ammissibile, vince quella ammissibile. Quando due soluzioni inammissibili vengono confrontate, la soluzione con il minor valore della funzione di fitness vince. Lo scopo è quello di selezionare le particelle leader che, quando inammissibili, giacciono vicine alla regione delle soluzioni ammissibili. Viene usata la seguente equazione per assegnare il valore della funzione di fitness ad una soluzione:

$$fit(\vec{x}) = \begin{cases} f_i(\vec{x}) & \text{se } \vec{x} \text{ ammissibile} \\ \sum_{j=1}^n g_j(\vec{x}) \sum_{k=1}^p |h_k(\vec{x})| & \text{altrimenti} \end{cases}$$

L'utilizzo di una popolazione così piccola di 5 particelle accelera la concentrazione delle particelle ad ogni iterazione e per questo non è molto comune in letteratura. Nonostante ciò, è possibile l'uso di una piccola dimensione di popolazione grazie all'implementazione di un processo di re-inizializzazione. Esso è articolato in modo da

sostituire alcune particelle in base alla funzione di fitness associata: dopo un certo numero di iterazioni, vengono create nuove particelle casualmente, per quanto riguarda posizione corrente e velocità, ma mantenendo salda la $pBest$ delle particelle sostituite.

L'ultimo approccio presentato da Zhang et al (2004) consiste nell'introduzione di un operatore di spostamento per poter aumentare le capacità esplorative della PSO. Questo approccio cerca di dare una soluzione per la gestione dei confini della regione ammissibile S derivante da un CNOP. Infatti, il $gBest$ cambia continuamente la sua posizione nello spazio ammissibile e può essere che si ritrovi in prossimità del confine della regione ammissibile. Questo vuol dire che alcune particelle potrebbero oltrepassare il confine. I tradizionali metodi di controllo dei confini tendono a riposizionare la particella all'interno della regione ammissibile grazie ad un operatore di spostamento inserito nella formula che regola la velocità delle particelle. Esistono due tipi di metodi di spostamento: Boundary mode e il Random mode.

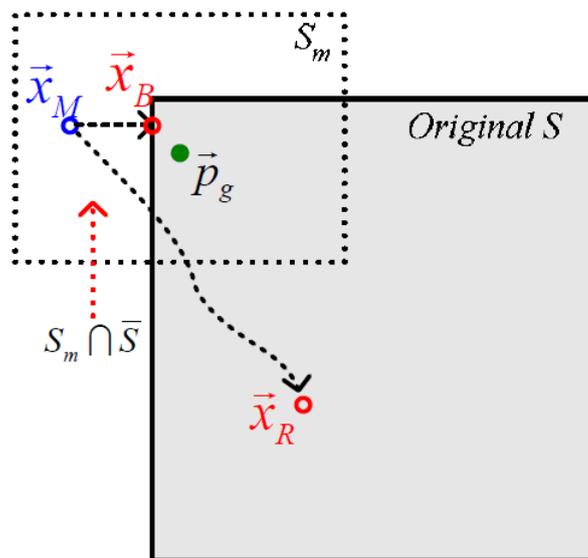


Figura 6: Approcci tradizionali nella gestione dei confini.
Fonte: (Zhang, Xie, & Bi, 2004)

Prendendo in considerazione il Boundary Mode, dalla figura si evince come la particella $\vec{x}_m \in S_m$ venga spostata a \vec{x}_B sul confine della regione S grazie alla regola:

$$\widetilde{M}_B(x_n): \begin{cases} x_n = 1_n & \text{se } x_n < l_n \\ x_n = u_n & \text{se } x_n > u_n \end{cases}$$

$\widetilde{M}_B(x_n)$ forza la particella che è situata fuori da S a tornare sul confine. l_n e u_n rappresentano il limite inferiore e superiore associate alla n-esima dimensione cosicché la particella sia situata all'interno della regione ammissibile. Inoltre, qualunque sia la direzione dell'eccesso, la soluzione viene modellata a seconda dei valori estremi ammissibili secondo la logica della produzione di uno shock il più piccolo possibile.

Per quanto riguarda il Random Mode, applica uno spostamento da $\vec{x}_M \rightarrow \vec{x}_R$:

$$\widetilde{M}_R(x_n): x_n = U_R(l_n, u_n)$$

dove $U_R(l_n, u_n)$ rappresenta un valore casuale compreso tra l_n, u_n . Questo metodo mira al riposizionamento della particella all'interno della regione ammissibile senza tenere conto della posizione finale e dell'entità dello shock della particella dovuto allo spostamento. Bisogna tenere conto del fatto che in entrambi gli approcci un frequente utilizzo di operazioni di spostamento M_R potrebbe disturbare lo stormo facendo diminuire la capacità di auto organizzarsi.

Un nuovo metodo di controllo dei confini è chiamato Periodic Mode e consiste nel riprodurre uno spazio di ricerca infinito per i movimenti delle particelle, composto da periodiche copie dello "spazio originario" S aventi lo stesso andamento della funzione di fitness. Con la figura riportata qui sotto sarà di più facile comprensione.

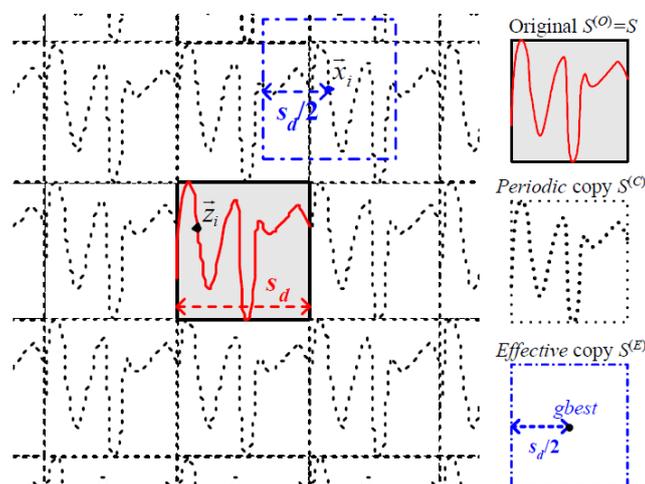


Figura 7: Periodic Mode. Fonte: (Zhang, Xie, & Bi, 2004)

Nella figura 7, la regione grigia è lo spazio originale $S^{(0)} = S$, le sue regioni vicine sono le sue copie periodiche chiamate $S^{(c)}$. In questo metodo non agisce alcun operatore di spostamento, ma per ogni particella $\vec{x} \in S^{(E)}$, con $S^{(E)}$ che rappresenta la “copia effettiva” di S , esiste una relazione uno ad uno con un'altra $\vec{z} \in S$. La mappatura avviene nel seguente modo:

$$\widetilde{M}_P(x_n \rightarrow z_n): \begin{cases} z_n = u_n - (l_n - x_n) \% s_n & \text{se } x_n < l_n \\ z_n = l_n - (x_n - u_n) \% s_n & \text{se } x_n > l_n \\ z_n = x_n & \text{se } x_n \in [l_n, u_n] \end{cases}$$

dove:

- $s_n = |u_n - l_n|$ è l'intervallo di variabilità associato alla n-esima dimensione.

Confrontando il Boundary ed il Random Mode, si nota come il Periodic Mode abbia il confine superiore ed il confine inferiore rispettivamente uguali a $x_n + \frac{s_n}{2}$ e $x_n - \frac{s_n}{2}$.

Inoltre, il Periodic Mode riduce la massima distanza possibile tra il *gbest* corrente e il *gbest* in assoluto perché essa è ridotta da S_n a $\frac{S_n}{2}$.

CAPITOLO 3

Applicazione del modello ai titoli italiani quotati nel FTSE Mib

In questo ultimo capitolo viene affrontata l'applicazione del modello ai dati storici dei titoli quotati nella Borsa di Milano componenti il FTSE Mib. Le analisi effettuate saranno inoltre contestualizzate in diversi scenari caratterizzanti il periodo preso in considerazione.

È doveroso introdurre, prima di iniziare il capitolo e le analisi, un breve excursus storico di ciò che è accaduto durante questi anni nei mercati finanziari. Due crisi hanno colpito gravemente i mercati finanziari: la crisi finanziaria del 2007-2009 e la crisi del debito sovrano del 2010-2011. La prima crisi è quella iniziata negli USA nel 2006 esplosa a causa della bolla immobiliare che si era creata dagli anni 2000 fino alla metà del 2006. I prezzi delle abitazioni negli Stati Uniti infatti, erano cresciuti in modo costante e a dismisura grazie anche alla politica accomodante della Federal Reserve (FED). Inoltre, la crescita dell'erogazione dei mutui subprime, cioè mutui erogati a clienti definiti "ad alto rischio" insolvenza, è stata sostenuta anche grazie alle operazioni di cartolarizzazioni che consistono nella trasformazione dei mutui in titoli e il trasferimento di essi da parte degli istituti di credito a soggetti terzi, le cosiddette "società veicolo". Così facendo gli istituti creditizi poterono recuperare immediatamente una buona parte del credito che altrimenti sarebbe rientrato alla fine dei mutui stessi, quando cioè il debitore avrebbe finito di pagare il mutuo. In questo modo le banche si liberavano del rischio di insolvenza e le società veicolo finanziavano l'acquisto dei mutui cartolarizzati attraverso la vendita di titoli a breve termine. Nel 2004, quando la FED innalzò i tassi di interesse, i mutui divennero più costosi, le insolvenze aumentarono e la bolla immobiliare scoppiò generando gravissime perdite nel settore bancario. La crisi si estese anche in Europa a causa dell'esposizione diretta o indiretta di alcune banche europee ai mutui subprime. Dal

settore finanziario si passò poi all'economia reale con una caduta dei redditi e dell'occupazione, una restrizione del credito alle famiglie e alle imprese e un drastico calo dei consumi e degli investimenti. La crisi del debito sovrano invece, che ha interessato l'Area Euro, ha le radici nella crisi dei mutui subprime. Infatti, numerose banche europee hanno riscontrato delle gravi difficoltà e sono state salvate da interventi pubblici, generando così grandi squilibri di finanza pubblica dei paesi più vulnerabili e contrazioni del PIL a livello globale. Per fronteggiare questa crisi la Banca Centrale Europea (BCE) è intervenuta con le due Long Term Refinancing Operations (LTROs), operazioni di mercato aperto attuate dalla BCE per la gestione dei tassi di interesse e della liquidità della zona Euro. Successivamente ha attuato le Outright Monetary Transactions (OMT), acquisto di titoli di stato a breve termine di paesi in difficoltà, e due misure straordinarie quali il Targeted Long Term Refinancing Operation (TLTRO) e l'acquisto di titoli ABS e Cover Bond. Nonostante le azioni di stimolo, l'economia reale continuava a frenare. Così nel 2015 la BCE ha implementato il quantitative easing (QE), cioè l'acquisto di titoli di stato dalle banche affinché si inserisse nuovo denaro nell'economia europea, si incentivassero i prestiti verso imprese e si aumentasse l'inflazione.

I mercati finanziari nel 2016 sono stati caratterizzati da un forte aumento dell'incertezza e i fattori che hanno aumentato l'avversione al rischio sono stati:

- I timori di un forte rallentamento delle economie avanzate a causa delle difficoltà dei paesi emergenti;
- Le future mosse della Federal Reserve che hanno aumentato l'incertezza generale nei primi mesi dell'anno e creato così un clima di maggiore scetticismo sulla effettiva capacità della politica monetaria di essere efficace sull'economia e sull'inflazione. Per quanto riguarda le operazioni della BCE hanno sì contribuito a frenare la caduta del credito e ridurre i tassi sui prestiti, ma

l'inflazione è rimasta vicina allo zero e le aspettative di lungo termine non sono riuscite a risalire.

- Un terzo fattore negativo è stata poi la revisione delle attese sulle prospettive di redditività delle banche, europee e non.
- Il quarto fattore sono state le incertezze di natura politica, tra cui ovviamente Brexit, che hanno portato a un progressivo deterioramento del clima di fiducia, in particolare a inizio 2016 e dallo scorso mese di Giugno (Prometeia, 2016).

In questo ultimo capitolo, dopo lo studio a livello teorico effettuato precedentemente, verrà presentata l'applicazione della PSO al modello di Jansen e Van Dijk per osservare se i risultati prodotti potranno essere buoni e soddisfacenti, riducendo così la complessità di utilizzo del modello sopra citato. Tale complessità è riscontrabile nei seguenti elementi:

1. Lungo tempo impiegato per l'ottenimento della soluzione;
2. Diverse assunzioni fatte per risolvere il modello;
3. Elevato grado di difficoltà dei procedimenti matematici adottati.

Essendo, quindi, la PSO una meta-euristica si può sostenere che il suo contributo agisca in termini di neutralizzazione della complessità.

L'analisi riportata di seguito sarà incentrata sull'utilizzo delle serie storiche dei 40 titoli quotati nel mercato italiano che compongono il FTSE Mib e dell'andamento dell'indice FTSE Mib nel periodo 03/01/2000 – 30/04/2017. I prezzi considerati per l'analisi sono quelli di chiusura di ciascuna giornata di negoziazione così come i dati riguardanti il benchmark FTSE Mib. Questo arco temporale però è troppo lungo per poter avere tutti i titoli quotati; infatti molti titoli, come ad esempio Ferrari, sono quotati solo in un momento successivo al 2000. Per questo si è preso come riferimento il periodo dall'04/01/2016 al 30/04/2017, provvedendo inoltre all'eliminazione del titolo Italgas in quanto entrato a fare parte del FTSE Mib solo nel 07/11/2016. I titoli considerati sono pertanto: A2a, Atlantia, Azimut holding, Banca Generali, Banca Mediolanum,

Banco Bpm, Bper Banca, Brembo, Buzzi Unicem, Campari, Cnh industrial, Enel, Eni, Exor, Ferrari, Fiat Chrysler Automobiles, Finecobank, Generali, Intesa San Paolo, Leonardo, Luxottica, Mediaset, Mediobanca, Moncler, Poste Italiane, Prysmian, Recordati, Saipem, Salvatore Ferragamo, Snam, Stmicroelectronics, Telecom Italia, Tenaris, Terna – rete elettrica nazionale, Ubi Banca, Unicredit, Unipol, Unipolsai, Yoox Net-A-Porter group.

Come anticipato nel Capitolo 1, è stato preso in considerazione il modello di Jansen e van Dijk come base di partenza per il modello usato nelle analisi. Il modello di Jansen e van Dijk è stato modificato nel modo seguente:

$$\begin{aligned} & \min_h TE(h) \\ & s. t \quad \sum_{i=1}^n h_i = 1 \\ & Kd < |\{i|h_i > 0\}| < Ku \\ & h_i \geq 0 \end{aligned}$$

Nel seguente modello è possibile notare come lo scopo sia sempre quello di minimizzare il TE rispetto il benchmark e i vincoli del modello sono:

- $h_i \geq 0$: divieto di shorting, presente anche nel modello originale;
- $\sum_{i=1}^n h_i = 1$: la somma dei pesi uguale ad 1, anch'esso presente nel modello originale;
- $Kd < |\{i|h_i > 0\}| < Ku$: il portafoglio deve contenere un numero di titoli compreso tra Kd, numero minimo di titoli, e Ku, numero massimo di titoli, estremi compresi.

Durante le analisi i valori Kd e Ku hanno assunto i valori:

1. $Kd = 5, Ku = 10 \rightarrow 5 < |\{i|h_i > 0\}| < 10$;
2. $Kd = 10, Ku = 15 \rightarrow 10 < |\{i|h_i > 0\}| < 15$;
3. $Kd = 15, Ku = 20 \rightarrow 15 < |\{i|h_i > 0\}| < 20$.

Al fine di stabilire la bontà della PSO come metodo risolutivo sono state effettuate, per ciascuna delle tre combinazioni di K_d e K_u elencate sopra, quattro configurazioni di numero di particelle e d'iterazioni. La prima conta 80 particelle e 5000 iterazioni, la seconda prevede 80 particelle 10000 iterazioni, la terza 160 particelle 5000 iterazioni e l'ultima 160 particelle e 10000 iterazioni. In ciascuna configurazione sono state effettuate 5 prove a parità di parametri in modo da scegliere il migliore risultato.

Per quanto riguarda la PSO invece, tenendo conto di quanto detto nel secondo capitolo, sono stati assegnati i seguenti valori:

- Coefficiente di accelerazione cognitivo: $c1 = 1,49618$;
- Coefficiente di accelerazione sociale: $c2 = 1,49618$;
- Peso di inerzia: $w = 0,7298$;

Dalle analisi effettuate mediante Matlab sono stati ottenuti tre risultati:

1. Il portafoglio migliore generato dalla PSO;
2. Grafico del Tracking Error del portafoglio migliore;
3. Grafico della funzione di fitness del portafoglio migliore.

I risultati, per rispettare i vincoli del divieto di vendite allo scoperto e della somma dei pesi uguale all'unità, sono stati successivamente raffinati ponendo una percentuale di investimento sul titolo selezionato pari allo 0 % qualora essa fosse risultata negativa e poi normalizzando la somma dei pesi all'unità. I titoli selezionati saranno quelli aventi il valore 1 e una percentuale di investimento positiva.

Di seguito si riportano i risultati del portafoglio migliore, con il più basso valore di fitness, e il portafoglio peggiore, con il più alto valore di fitness, di ciascuna settaggio. Inizieremo con $K_d = 5$ $K_u = 10$, per poi proseguire con $K_d = 10$ $K_u = 15$ ed infine $K_d = 15$ $K_u = 20$.

3.1 1° Settaggio

I risultati presentati di seguito si riferiscono al settaggio caratterizzato da $K_d = 5$ e $K_u = 10$. Vengono proposti solo due portafogli ottimi, il primo che è il migliore con il più basso valore della funzione di fitness, e il secondo che è il peggiore con il più basso valore. Per ciascuno di essi sono riportati anche i grafici della funzione di fitness e quello del Tracking Error. Il portafoglio migliore è stato ottenuto in una delle prove con 160 particelle e 10000 iterazioni, mentre il peggiore utilizzando 80 particelle e 5000 iterazioni.

TITOLI	PESI	TITOLI SELEZIONATI
A2a	0%	1
Atlantia	0%	0
Azimut holding	0%	0
Banca Generali	0%	1
Banca Mediolanum	0%	0
Banco Bpm	0%	0
Bper Banca	0%	0
Brembo	0,00001%	1
Buzzi Unicem	0%	0
Campari	0%	0
Cnh industrial	0%	0
Enel	0%	0
Eni	0%	0
Exor	0%	0
Ferrari	0%	0
Fiat Chrysler Automobiles	0,0000002%	1
Fincobank	0%	1
Generali	0%	0
Intesa San Paolo	0%	0
Leonardo	0%	0
Luxottica	0,3%	1
Mediaset	0%	0
Mediobanca	0%	1
Moncler	0%	0
Poste Italiane	0%	0
Prysmian	0%	0
Recordati	0%	0
Saipem	0,000001%	1
Salvatore Ferragamo	0%	0
Snam	0%	0

Stmicroelectronics	0%	0
Telecom Italia	0%	1
Tenaris	0%	0
Terna - rete elettrica nazionale	99,7%	1
Ubi banca	0%	0
Unicredit	0%	0
Unipol	0%	0
Unipolsai	0%	0
Yoox Net-A-Porter group	0%	0
	Numero di particelle	160
	Numero di iterazioni	10000
	Fitness	2.149,42
	Rho (misura di rischio)	0,000073240

Tabella 1: Portafoglio migliore con 160 particelle e 10000 iterazioni

Per quanto riguarda il primo portafoglio (tabella 1) esso presenta 5 titoli selezionati: Brembo, Fiat Chrysler Automobiles (FCA), Luxottica, Saipem e Terna – Rete Elettrica Nazionale.

Si osserva come le percentuali dei pesi dei titoli su cui investire siano molto basse, e siano sostanzialmente concentrate con il 99,7% nel titolo Terna – Rete Elettrica Nazionale. Si può inoltre ritenere accettabile lo 0,3% nel titolo di Luxottica. Per quanto riguarda gli altri titoli selezionati le percentuali di investimento su di essi sono pressoché nulle. In questo caso, quindi, si verifica un problema di percentuale minima di investimento. Come si evince dal grafico 8 la funzione di fitness diminuisce con l'aumentare delle iterazioni effettuate così come il Tracking Error che si avvicina allo zero (grafico 9). Quindi con l'aumentare delle iterazioni e delle particelle il Tracking error viene minimizzato.

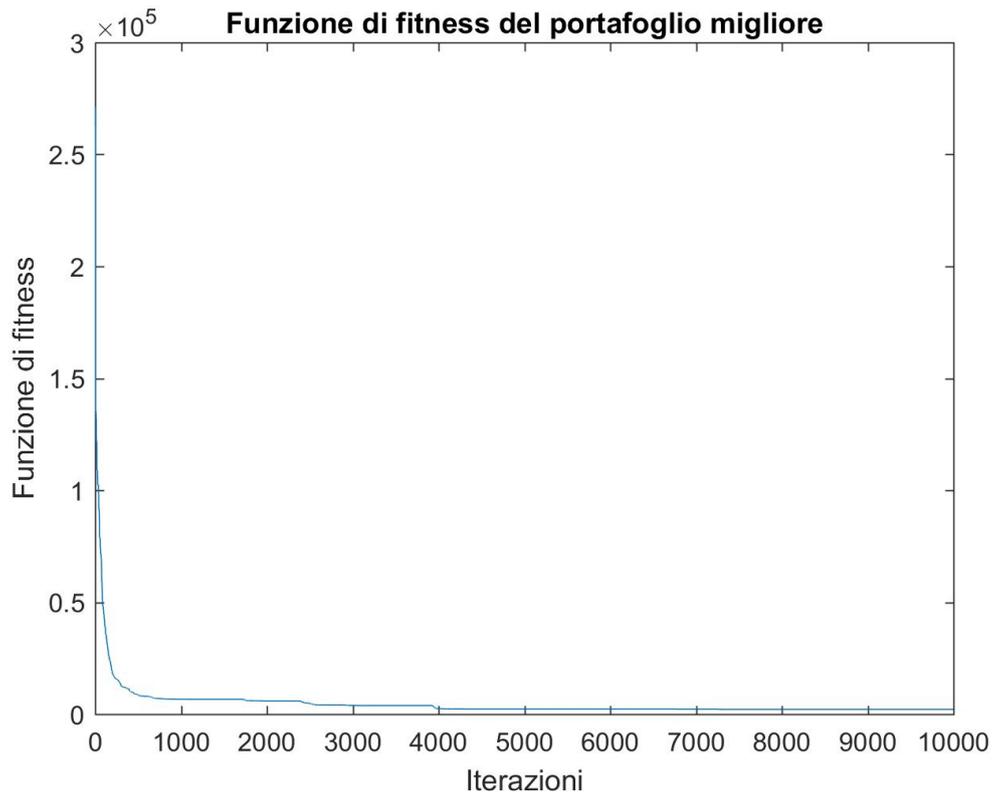


Grafico 8: Funzione di fitness del portafoglio migliore

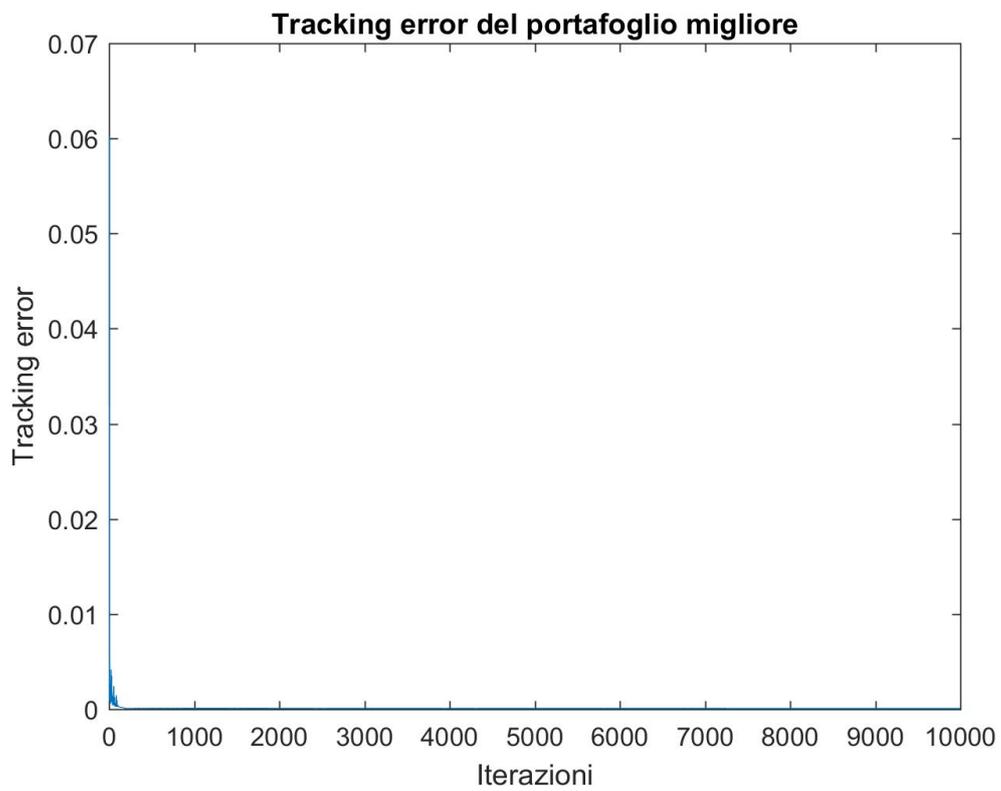


Grafico 9: TE del portafoglio migliore

Per quanto riguarda il portafoglio peggiore in tabella 2, notiamo come i titoli scelti siano Ferrari, Mediobanca, Salvatore Ferragamo, Stmicroelectronics, Telecom Italia, Tenaris, Terna – rete elettrica nazionale. Le percentuali di investimento sono soddisfacenti, quasi nulle invece nei titoli di Terna – rete elettrica nazionale e in Salvatore Ferragamo. Confrontando i due portafogli e i corrispettivi grafici della funzione di fitness e del TE, si nota come i valori della funzione di fitness e del rho siano nettamente inferiori nel portafoglio migliore. Soffermandosi sul grafico 10 è evidente come la linea della funzione di fitness non sia “rasente” all’asse delle ascisse, come invece è nel primo portafoglio. Nel grafico 11 anche il TE risulta essere maggiore rispetto al primo portafoglio, però è stato comunque minimizzato. Quindi un valore più basso di iterazioni e di particelle, in questo caso ricordiamo 80 particelle e 5000 iterazioni, fa sì che si abbiano risultati leggermente peggiori. Questo secondo portafoglio però risulta essere formato meglio rispetto il primo in quanto le quote di investimento sono più distribuite tra i titoli. Nel primo titolo, infatti, il denaro a disposizione dovrebbe essere investito per il 99,7% in Terna-rete elettrica nazionale, mentre in questo il denaro viene distribuito in 5 titoli. Idealmente sarebbe meglio offrire un portafoglio come il secondo ad un cliente.

TITOLI	PESI	TITOLI SELEZIONATI
A2a	0%	0
Atlantia	0%	0
Azimut holding	0%	0
Banca Generali	0%	0
Banca Mediolanum	0%	0
Banco Bpm	0%	0
Bper Banca	0%	0
Brembo	0%	0
Buzzi Unicem	0%	0
Campari	0%	0
Cnh industrial	0%	1
Enel	0%	0
Eni	0%	0
Exor	0%	0
Ferrari	26%	1

Fiat Chrysler Automobiles	0%	0
Fincobank	0%	0
Generali	0%	0
Intesa San Paolo	0%	0
Leonardo	0%	0
Luxottica	0%	1
Mediaset	0%	0
Mediobanca	15%	1
Moncler	0%	0
Poste Italiane	0%	0
Prysmian	0%	0
Recordati	0%	0
Saipem	0%	0
Salvatore Ferragamo	0,01%	1
Snam	0%	0
Stmicroelectronics	18%	1
Telecom Italia	8%	1
Tenaris	33%	1
Terna - rete elettrica nazionale	0,00003%	1
Ubi banca	0%	0
Unicredit	0%	0
Unipol	0%	0
Unipolsai	0%	0
Yoox Net-A-Porter group	0%	0
	Numero di particelle	80
	Numero di iterazioni	5000
	Fitness	21089,81
	Rho (misura di rischio)	0,000221900

Tabella 2: portafoglio peggiore con 80 particelle e 5000 iterazioni

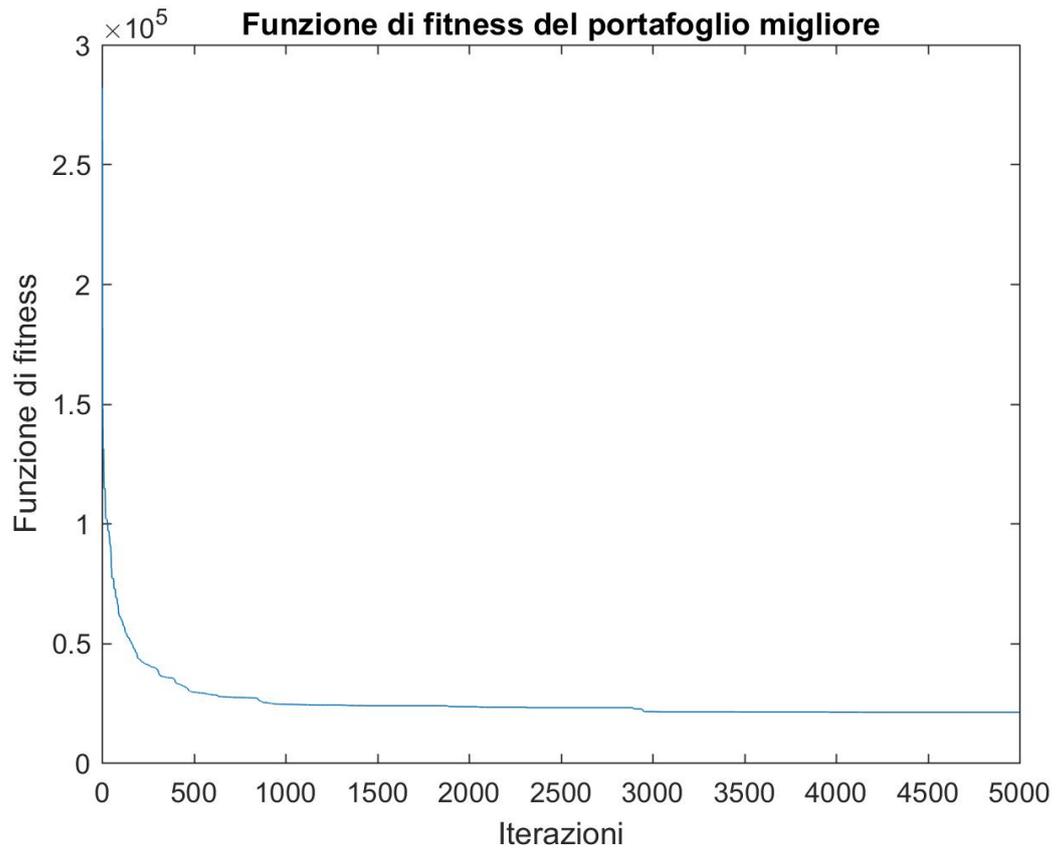


Grafico 10: Funzione di fitness del portafoglio peggiore

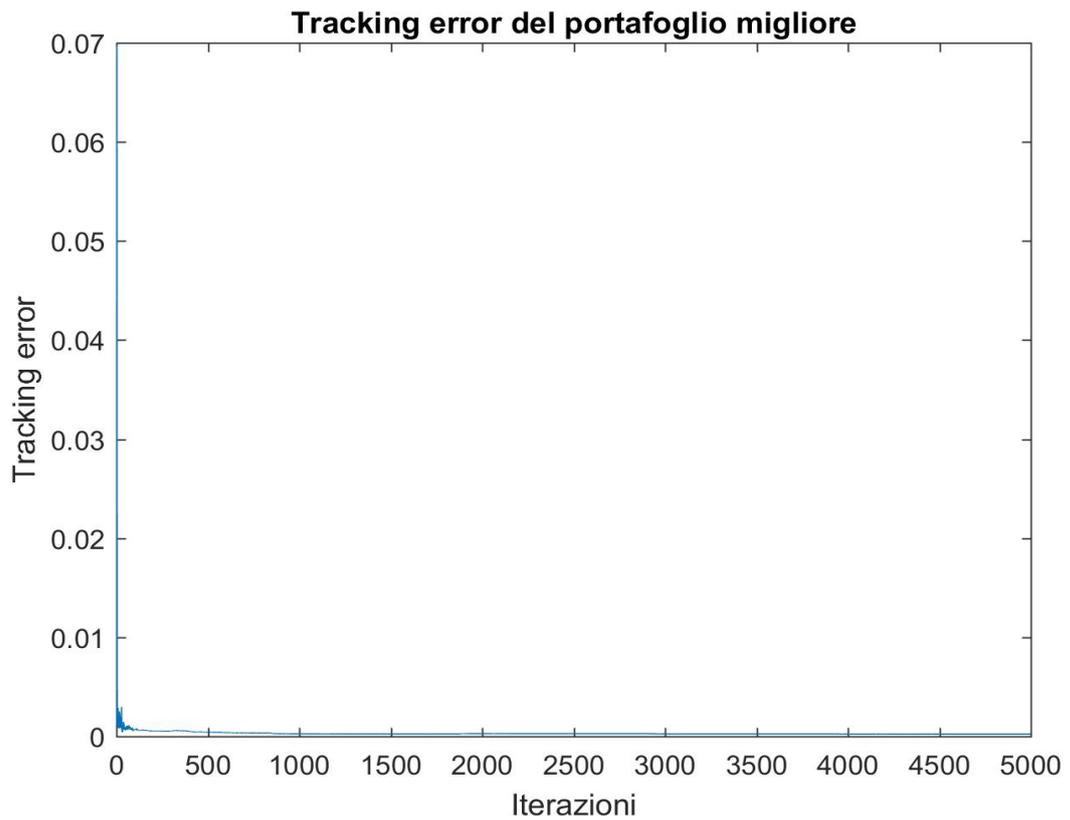


Grafico 11: TE del portafoglio peggiore

Per quanto riguarda tutte le altre prove effettuate di questo settaggio è possibile consultarle nell'appendice A.

3.2 2° Settaggio

I risultati qui riportati si riferiscono al settaggio con $K_d = 10$ e $K_u = 15$ e sono presentati il portafoglio ottimo migliore e il portafoglio ottimo peggiore. Come nel precedente paragrafo vengono inoltre inseriti anche i grafici della funzione di fitness e del Tracking Error. Anche in questo caso si ha il portafoglio migliore caratterizzato da 160 particelle e 10000 iterazioni e quello peggiore da 80 particelle e 5000 iterazioni.

Osservando il primo portafoglio in tabella 3, quello migliore, i titoli selezionati sono: Eni, Ferrari, Fincobank, Intesa San Paolo, Mediobanca, Moncler, Prysmian, Saipem, Ubi Banca e Unicredit. In questo caso si può notare come le percentuali di investimento sui titoli selezionati siano soddisfacenti, tranne nei titoli di Ferrari, Intesa San Paolo e Unicredit. I valori della funzione di fitness e della misura di rischio sono i più bassi rispetto a tutte le prove effettuate. Si nota infatti dal grafico 12 come la funzione di fitness diminuisca dopo le 3000 iterazioni e ancora dopo le 8000 iterazioni facendo avere al portafoglio un valore di fitness di 1.282,10, il minore in assoluto. Anche nel grafico 13 è evidente come il TE sia stato minimizzato.

TITOLI	PESI	TITOLI SELEZIONATI
A2a	0%	0
Atlantia	0%	0
Azimut holding	0%	0
Banca Generali	0%	0
Banca Mediolanum	0%	0
Banco Bpm	0%	0
Bper Banca	0%	0
Brembo	0%	0
Buzzi Unicem	0%	0
Campari	0%	0
Cnh industrial	0%	0
Enel	0%	1

Eni	6%	1
Exor	0%	1
Ferrari	0,001%	1
Fiat Chrysler Automobiles	0%	0
Fincobank	16%	1
Generali	0%	0
Intesa San Paolo	0,0000003%	1
Leonardo	0%	0
Luxottica	0%	0
Mediaset	0%	0
Mediobanca	1%	1
Moncler	37%	1
Poste Italiane	0%	0
Prysmian	39%	1
Recordati	0%	0
Saipem	0,01%	1
Salvatore Ferragamo	0%	0
Snam	0%	0
Stmicroelectronics	0%	0
Telecom Italia	0%	0
Tenaris	0%	0
Terna - rete elettrica nazionale	0%	0
Ubi banca	1%	1
Unicredit	0,000000001%	1
Unipol	0%	1
Unipolsai	0%	0
Yoox Net-A-Porter group	0%	0
	Numero di particelle	160
	Numero di iterazioni	10000
	Fitness	1.282,10
	Rho (misura di rischio)	0,000020549

Tabella 3: portafoglio migliore con 160 particelle e 10000 iterazioni

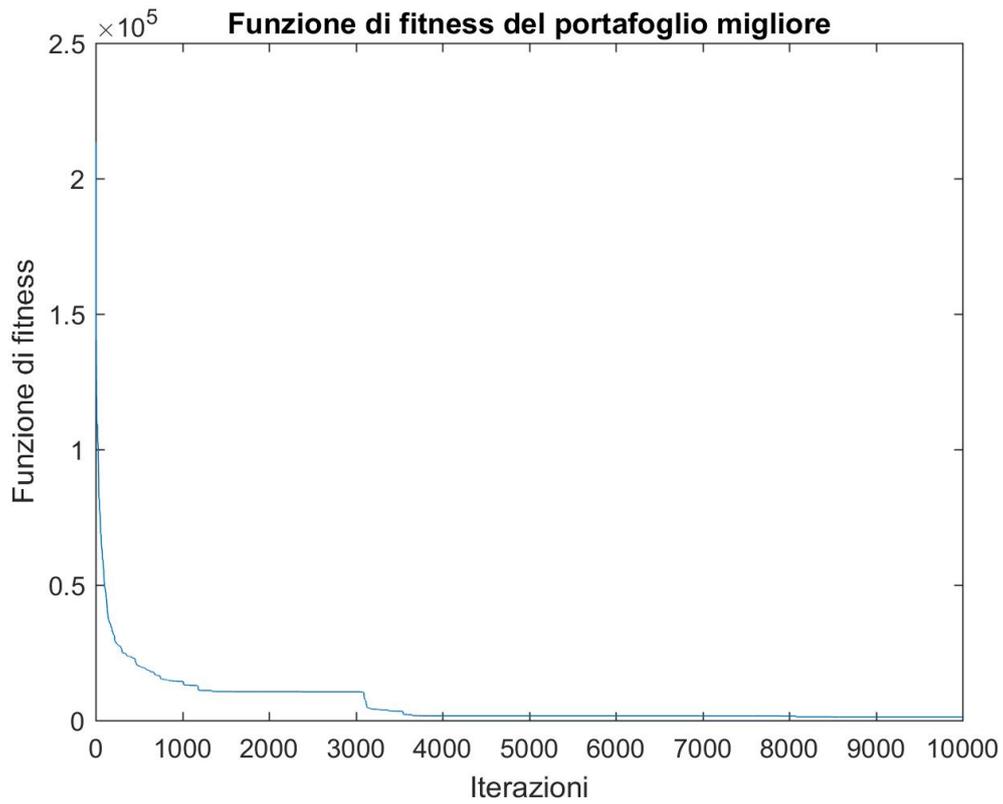


Grafico 12: funzione di fitness del portafoglio migliore

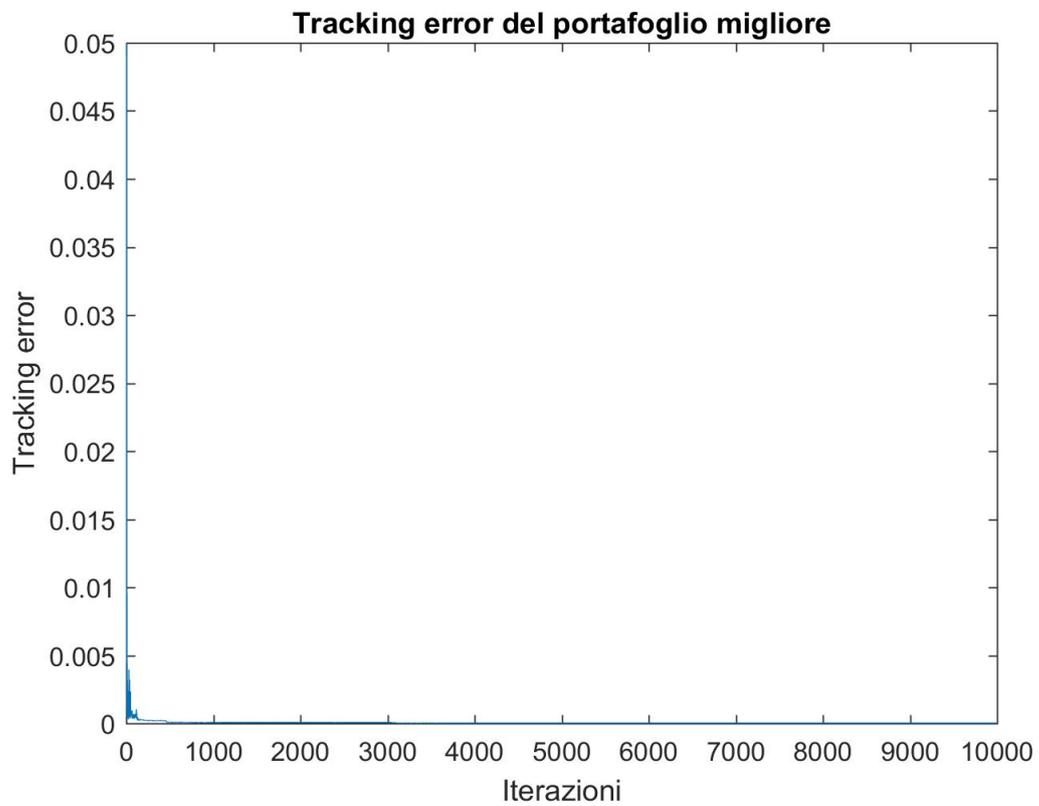


Grafico 13: TE del portafoglio migliore

Nel portafoglio peggiore della tabella 4 i titoli selezionati sono Moncler, Salvatore Ferragamo e Tenaris. Le percentuali di investimento sono concentrate sui titoli di Salvatore Ferragamo e Tenaris, in quanto la maggior parte degli altri titoli selezionati prevedeva la vendita allo scoperto. Anche in questo caso, così come il 1° settaggio, i valori della funzione di fitness e della misura di rischio sono superiori rispetto al portafoglio migliore in quanto sono diminuite le iterazioni (5000) e le particelle (80). Molto evidente il valore elevato della funzione di fitness nel grafico 14 e anche il valore del TE nel grafico 15. In questo portafoglio inoltre i titoli selezionati sono solo due poiché Moncler presenta un peso di 0,000001% quindi quasi inesistente. Questo porta alla violazione del vincolo $Kd = 10$.

TITOLI	PESI	TITOLI SELEZIONATI
A2a	0%	0
Atlantia	0%	0
Azimut holding	0%	0
Banca Generali	0%	0
Banca Mediolanum	0%	1
Banco Bpm	0%	0
Bper Banca	0%	0
Brembo	0%	1
Buzzi Unicem	0%	0
Campari	0%	0
Cnh industrial	0%	0
Enel	0%	0
Eni	0%	1
Exor	0%	0
Ferrari	0%	0
Fiat Chrysler Automobiles	0%	0
Fincobank	0%	0
Generali	0%	0
Intesa San Paolo	0%	0
Leonardo	0%	1
Luxottica	0%	0
Mediaset	0%	1
Mediobanca	0%	0
Moncler	0,000001%	1
Poste Italiane	0%	0
Prysmian	0%	0
Recordati	0%	0

Saipem	0%	0
Salvatore Ferragamo	55%	1
Snam	0%	0
Stmicroelectronics	0%	0
Telecom Italia	0%	0
Tenaris	45%	1
Terna - rete elettrica nazionale	0%	1
Ubi banca	0%	0
Unicredit	0%	0
Unipol	0%	0
Unipolsai	0%	1
Yoox Net-A-Porter group	0%	0
Numero di particelle		80
Numero di iterazioni		5000
Fitness		15.659,83
Rho (misura di rischio)		0,00017364000

Tabella 4: portafoglio peggiore con 80 particelle e 5000 iterazioni

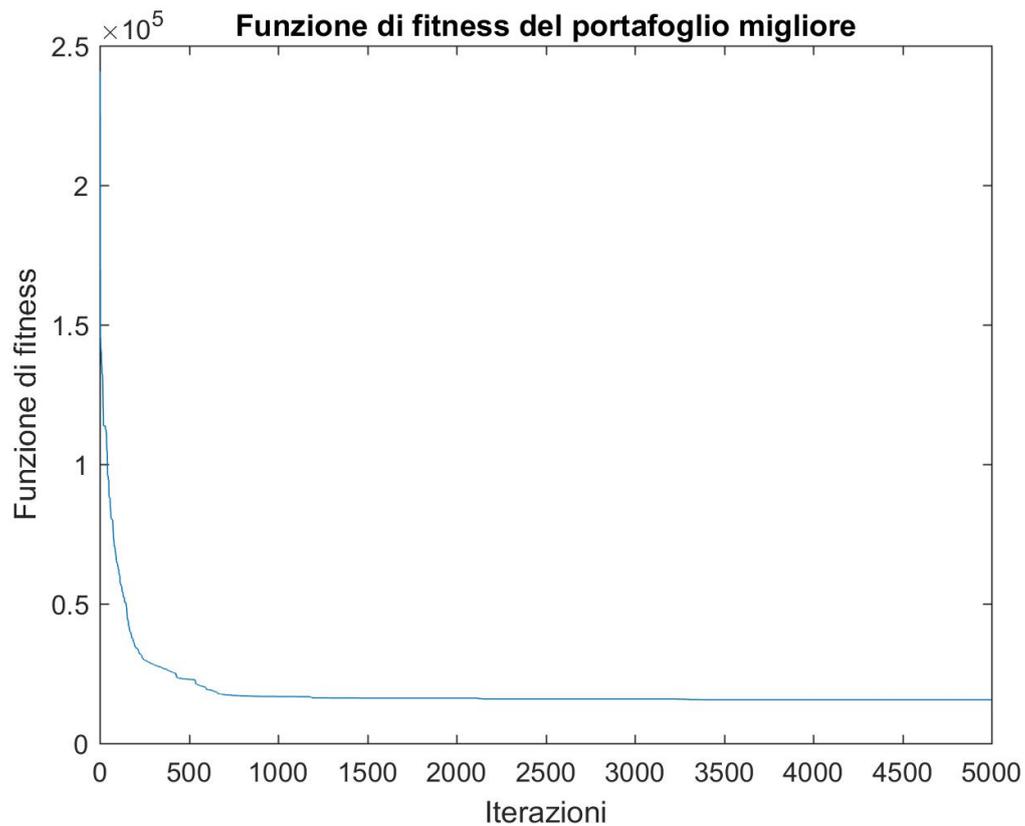


Grafico 14: funzione fitness del portafoglio peggiore

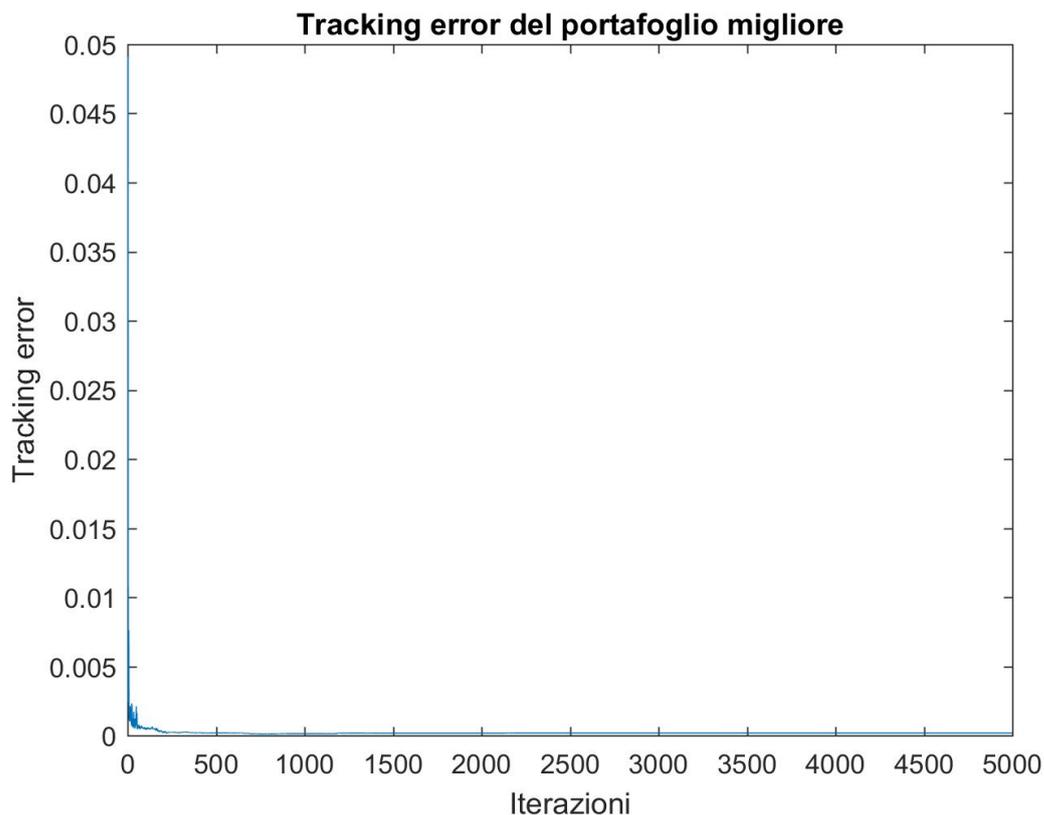


Grafico 15: TE del portafoglio peggiore

3.3 3° Settaggio

L'ultimo settaggio riguarda le prove effettuate con $K_d = 15$ e $K_u = 20$. Sono riportati di seguito il portafoglio migliore con 160 particelle e 10000 iterazioni e il portafoglio peggiore con 80 particelle e 10000 iterazioni.

Il primo portafoglio riportato nella tabella 5 è quello migliore caratterizzato ancora da 160 particelle e 10000 iterazioni. In questo portafoglio sono stati selezionati i seguenti titoli: Banca Mediolanum, Bper Banca, Cnh. Industrial, Enel, FCA, Luxottica, Moncler, Poste Italiane, Prysmian, Recordati, Stmicroelectronics, Unipolsai. Le percentuali di investimento sono concentrate sui titoli di Banca Mediolanum, Cnh. Industrial, FCA, Recordati e Unipolsai, mentre le altre sono percentuali bassissime. I titoli selezionati sono 12 violando così il vincolo di titoli minimi detenibili nel portafoglio K_d .

Osservando il grafico 17 si osserva come il TE sia minimizzato al massimo dopo 4000 iterazioni.

TITOLI	PESI	TITOLI SELEZIONATI
A2a	0%	1
Atlantia	0%	0
Azimut holding	0%	0
Banca Generali	0%	0
Banca Mediolanum	6%	1
Banco Bpm	0%	0
Bper Banca	0,0001%	1
Brembo	0%	0
Buzzi Unicem	0%	0
Campari	0%	1
Cnh industrial	0,1%	1
Enel	0,0000000004%	1
Eni	0%	0
Exor	0%	0
Ferrari	0%	0
Fiat Chrysler Automobiles	63%	1
Fincobank	0%	0
Generali	0%	0
Intesa San Paolo	0%	0
Leonardo	0%	0
Luxottica	0,01%	1
Mediaset	0%	0
Mediobanca	0%	0
Moncler	0,001%	1
Poste Italiane	0,000000002%	1
Prysmian	0,0001%	1
Recordati	0,3%	1
Saipem	0%	0
Salvatore Ferragamo	0%	0
Snam	0%	0
Stmicroelectronics	0,000000003%	1
Telecom Italia	0%	0
Tenaris	0%	1
Terna - rete elettrica nazionale	0%	0
Ubi banca	0%	0
Unicredit	0%	0
Unipol	0%	0
Unipolsai	31%	1
Yoox Net-A-Porter group	0%	0
	Numero di particelle	160

Numero di iterazioni	10000
Fitness	3.071,72
Rho (misura di rischio)	0,0000672670

Tabella 5: portafoglio migliore con 160 particelle e 10000 iterazioni

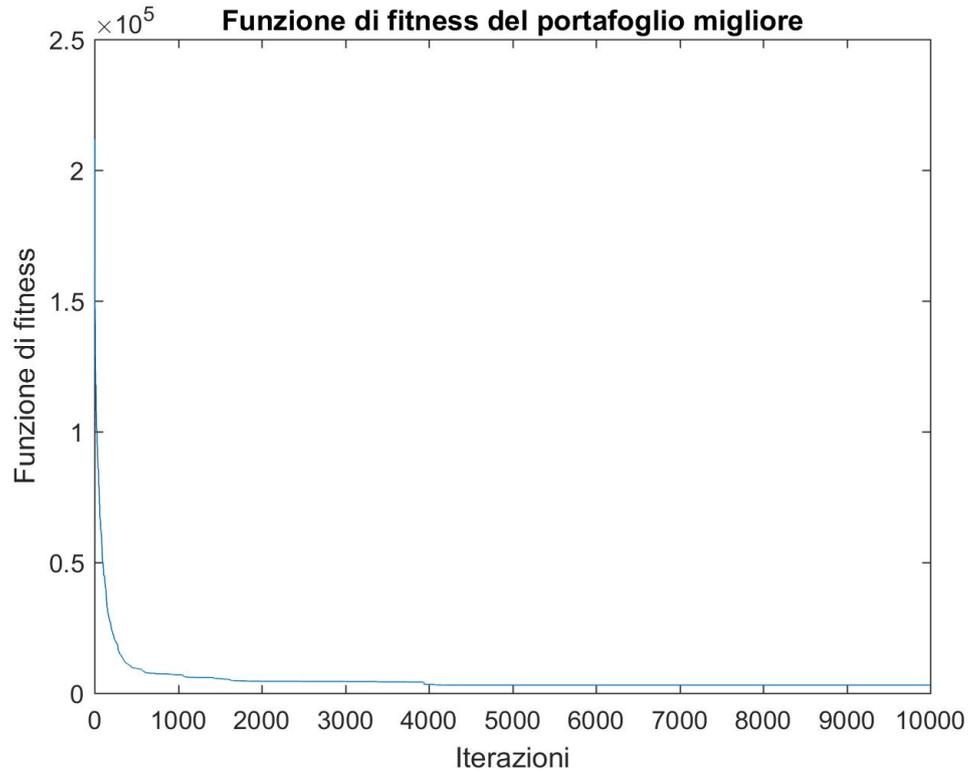


Grafico 16: funzione di fitness del portafoglio migliore

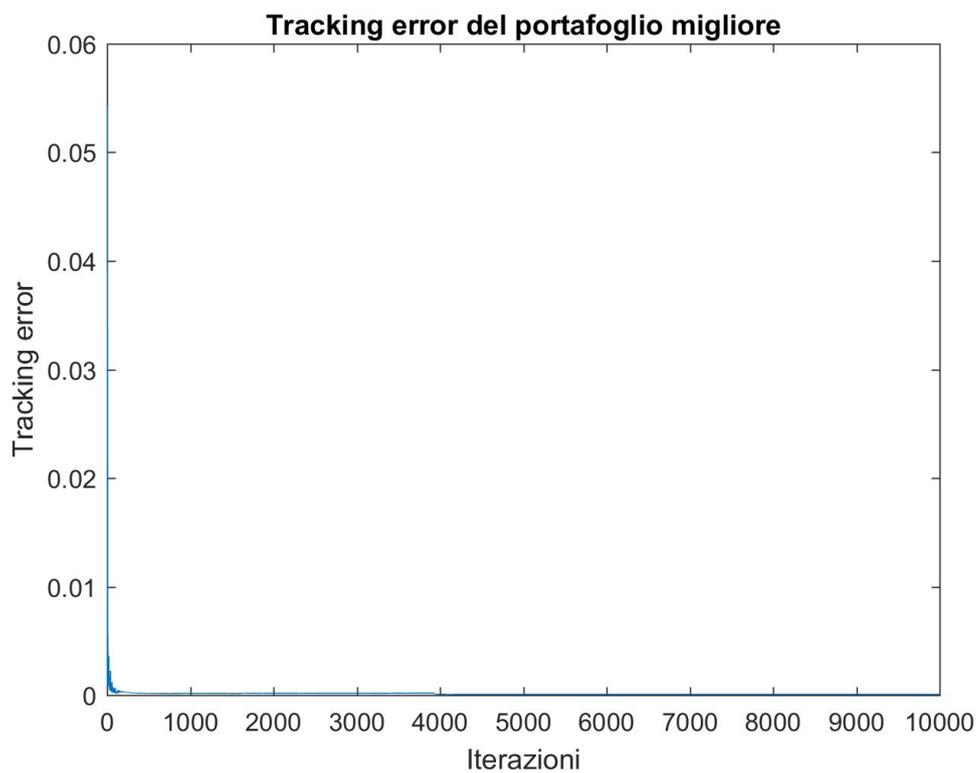


Grafico 17: TE portafoglio peggiore

Nel seguente portafoglio, il peggiore, notiamo come i titoli scelti siano: Poste Italiane, Prysmian, Telecom Italia, Terna – rete elettrica nazionale e Yoox Net – A – Porter group. I pesi però sono distribuiti in 3 titoli, mentre gli altri hanno percentuali molto basse. Si nota anche in questo caso, così come il portafoglio migliore, si abbia una violazione del limite Kd in quanto vengono selezionati solo 5 titoli. Si può quindi constatare come entrambi i portafogli di questa tranche violino il numero minimo di titoli detenibili.

TITOLI	PESI	TITOLI SELEZIONATI
A2a	0%	0
Atlantia	0%	0
Azimut holding	0%	0
Banca Generali	0%	1
Banca Mediolanum	0%	1
Banco Bpm	0%	0
Bper Banca	0%	0
Brembo	0%	1
Buzzi Unicem	0%	0
Campari	0%	0
Cnh industrial	0%	0
Enel	0%	1
Eni	0%	1
Exor	0%	0
Ferrari	0%	0
Fiat Chrysler Automobiles	0%	0
Fincobank	0%	0
Generali	0%	0
Intesa San Paolo	0%	0
Leonardo	0%	0
Luxottica	0%	1
Mediaset	0%	0
Mediobanca	0%	0
Moncler	0%	0
Poste Italiane	3%	1
Prysmian	59%	1
Recordati	0%	1
Saipem	0%	0
Salvatore Ferragamo	0%	0
Snam	0%	1
Stmicroelectronics	0%	1
Telecom Italia	0,00001%	1

Tenaris	0%	0
Terna - rete elettrica nazionale	38%	1
Ubi banca	0%	0
Unicredit	0%	0
Unipol	0%	1
Unipolsai	0%	0
Yoox Net-A-Porter group	0,000003%	1
	Numero di particelle	80
	Numero di iterazioni	10000
	Fitness	22.302,81
	Rho (misura di rischio)	0,000211060

Tabella 6: portafoglio peggiore con 80 particelle e 10000 iterazioni

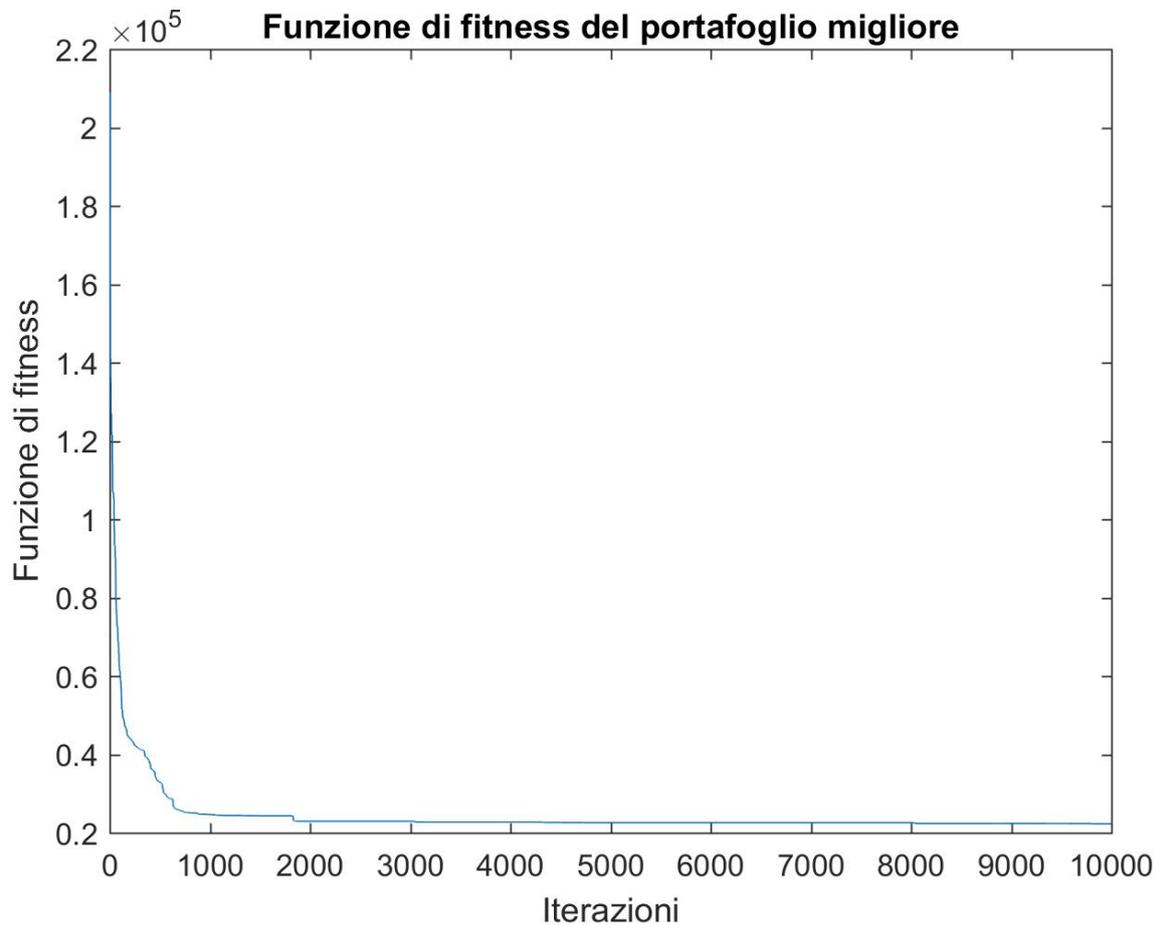


Grafico 18: Funzione fitness portafoglio peggiore

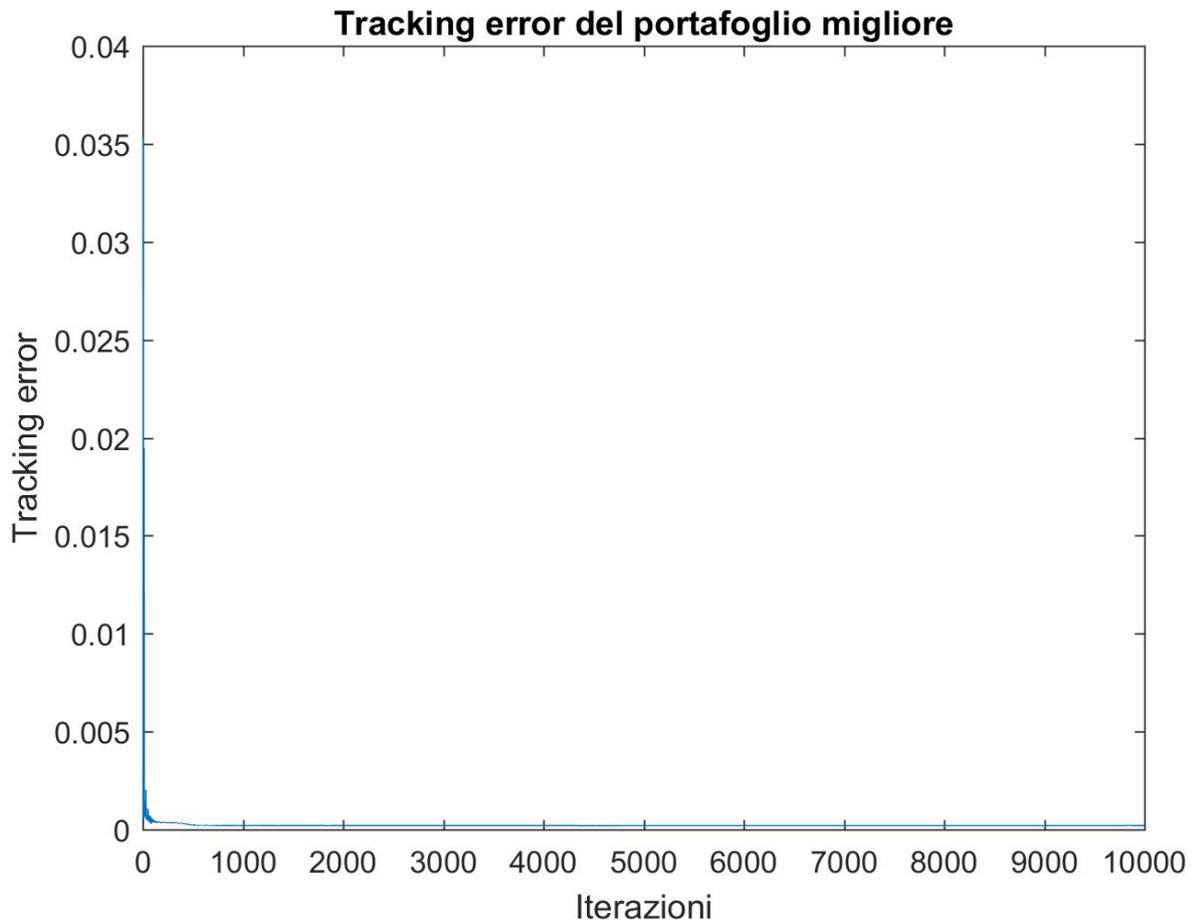


Grafico 19: TE portafoglio peggiore

3.4 Considerazioni

L'applicazione della PSO come metodo risolutivo del modello di Roel Jansen e Ronald van Dijk opportunamente modificato con l'inserimento del range di titoli detenibili nel portafoglio, comporta numerosi vantaggi. Utilizzare il modello di Jansen e van Dijk, infatti, per ottenere una soluzione ottimale per il nostro problema è complicato. La ragione risiede nell'enorme numero di possibilità nel scegliere un numero di titoli da detenere nel portafoglio su quelli presenti nel benchmark. Come detto precedentemente, prendendo come esempio lo S&P 100 come benchmark, le possibilità di scegliere 20 titoli su 100 titoli disponibili sono tantissime, infatti la notazione matematica può essere espressa come $\binom{100}{20}$ che equivale a dire un numero

che va oltre a 1×10^{20} . Si nota infatti nei risultati ottenuti da Jansen e van Dijk come scegliere 10 titoli su 25 richieda più di 3 milioni di ottimizzazioni sequenziali quadratiche risultando così un tempo di calcolo pari a 75 minuti. Quindi, a causa del troppo tempo coinvolto, trovare il più basso Tracking Error tra tutte queste possibilità è molto difficile. Trovare una soluzione ottima potrebbe essere possibile solo per benchmarks e TE portafogli con veramente pochi assets. Jansen e van Dijk, inoltre, notano come nel loro modello originale il vincolo della detenzione di un numero limitato di titoli nel portafoglio sia caratterizzato da discontinuità e quindi cercano di trovare altre vie per incorporare questo vincolo nel modello. Partiamo dal modello originale:

$$\begin{aligned} & \min_h TE(h) \\ & s. t \quad \sum_{i=1}^{100} h_i = 1 \\ & \quad |\{i|h_i > 0\}| = 20 \\ & \quad h_i \geq 0 \end{aligned}$$

Come trattato nel primo capitolo, essi modificano quindi il secondo vincolo in modo da avere una funzione continua:

$$\lim_{p \downarrow 0} \sum_{i=1}^{100} h_i^p = |\{i|h_i > 0\}|$$

e la funzione continua è $\sum_{i=1}^{100} h_i^p$ che dà una buona approssimazione di $|\{i|h_i > 0\}|$ funzione discontinua. Si viene a creare quindi un'alternativa:

$$\min_h TE(h) + c \sum_{i=1}^{100} h_i^p$$

$$s. t \sum_{i=1}^{100} h_i = 1$$

$$h_i \geq 0$$

dove si notano i fattori c e p . Questi fattori sono stati ampiamente trattati precedentemente e si nota come tutti i procedimenti matematici per rendere la soluzione ottima di questo nuovo modello coincidente con quella del modello originale siano molto complicati.

Per questo motivo, invece dei due metodi risolutivi utilizzati da Jansen e van Dijk, è stata attuata la PSO che essendo una meta-euristica non necessita di molte assunzioni sul problema. Essa, inoltre, consente esplorazioni di grandi spazi di soluzioni per poi concentrarsi su una zona specifica dove una o più particelle hanno trovato un possibile target secondo le caratteristiche assegnate alla funzione di fitness. Un metodo risolutivo quindi semplice, capace di adattarsi con successo ai vari problemi matematici. I risultati ottenuti con questo metodo risolutivo sono soddisfacenti e il tempo di esecuzione per ottenere un numero minimo di titoli nel portafoglio è di pochissimi minuti. Di seguito viene proposto il portafoglio con il miglior valore fitness ottenuto:

TITOLI	PESI	TITOLI SELEZIONATI
A2a	0%	0
Atlantia	0%	0
Azimut holding	0%	0
Banca Generali	0%	0
Banca Mediolanum	0%	0
Banco Bpm	0%	0
Bper Banca	0%	0
Brembo	0%	0
Buzzi Unicem	0%	0

Campari	0%	0
Cnh industrial	0%	0
Enel	0%	1
Eni	6%	1
Exor	0%	1
Ferrari	0,001%	1
Fiat Chrysler Automobiles	0%	0
Fincobank	16%	1
Generali	0%	0
Intesa San Paolo	0,0000003%	1
Leonardo	0%	0
Luxottica	0%	0
Mediaset	0%	0
Mediobanca	1%	1
Moncler	37%	1
Poste Italiane	0%	0
Prysmian	39%	1
Recordati	0%	0
Saipem	0,01%	1
Salvatore Ferragamo	0%	0
Snam	0%	0
Stmicroelectronics	0%	0
Telecom Italia	0%	0
Tenaris	0%	0
Terna - rete elettrica nazionale	0%	0
Ubi banca	1%	1
Unicredit	0,000000001%	1
Unipol	0%	1
Unipolsai	0%	0
Yoox Net-A-Porter group	0%	0
	Numero di particelle	160
	Numero di iterazioni	10000
	Fitness	1.282,10
	Rho (misura di rischio)	0,000020549

Tabella 7: portafoglio migliore in assoluto con 160 particelle e 10000 iterazioni

Il risultato è un buon portafoglio con dei pesi ben distribuiti su più titoli, una buona misura di rischio e potrebbe essere un portafoglio da proporre ad un eventuale investitore.

CAPITOLO 4

Valutazione dell'efficacia del modello nel futuro virtuale

In questo ultimo capitolo dell'elaborato vengono applicati i portafogli in-sample, ottenuti nel precedente capitolo, sul periodo out-of-sample, detto anche futuro virtuale, per osservare l'efficacia del modello.

I dati utilizzati nel capitolo precedente sono quelli rilevati dal 04/01/2016 al 30/04/2017, periodo che possiamo chiamare *in-sample*. Arco temporale in cui sono stati stimati i parametri del modello che ora saranno applicati nel periodo dal 02/05/2017 al 31/05/2017 chiamato *out-of-sample* (futuro virtuale) per verificare l'efficacia del modello. Per semplificare, è stato ipotizzato di essere al 30/04/2017, ultimo giorno del periodo in-sample, con la prospettiva di investire un capitale per il mese successivo, usando come percentuali di investimento quelle trovate nel periodo precedente considerato. Al termine di Maggio 2017 si osserverà se il portafoglio costruito è in grado di replicare o meno l'andamento del benchmark considerato, i rendimenti del FTSE Mib.

Il procedimento che ha condotto a questi risultati finali è stato il seguente. Sono stati scaricati i dati relativi ai prezzi dei titoli del FTSE Mib nel mese di Maggio 2017, escludendo il titolo Italgas poiché non considerato nel periodo in-sample. Di conseguenza sono stati scaricati i dati relativi all'andamento del FTSE Mib per lo stesso periodo di tempo. Successivamente sono stati calcolati i rendimenti logaritmici giornalieri, per i titoli e per il FTSE Mib, tramite la seguente formula:

$$R_{ln,t} = \ln\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}}\right).$$

I rendimenti risultanti da questa operazione sono stati moltiplicati per i pesi ottenuti nel portafoglio in-sample. I portafogli utilizzati sono i migliori ottenuti in ciascun

settaggio. Infine è stata calcolata la deviazione standard (σ) tra il rendimento del portafoglio e quello del FTSE Mib.

Vengono riportati di seguito i risultati rispettivamente del 1° settaggio, 2° settaggio e 3° settaggio. Per motivi pratici si riportano i risultati del rendimento totale giornaliero del portafoglio, il rendimento giornaliero del FTSE Mib e la deviazione standard.

4.1 1° Settaggio *out-of-sample*

Come si può notare dalla tabella 8 la performance del portafoglio migliore del primo settaggio riesce a replicare in modo soddisfacente quella del FTSE Mib. I risultati infatti mostrano come la deviazione standard σ sia relativamente bassa, precisamente 1,19%, rendendo così il portfolio trovato in-sample in grado di produrre risultati out-of-sample esaustivi. Osservando il grafico 20 si può avere una visione più immediata di quali sono stati gli andamenti del portfolio e del FTSE Mib, infatti si nota come essi siano pressappoco gli stessi, tranne il 19/05/2017 dove si registra un netto allontanamento tra le due linee.

Data	Tot. Rendimento portfolio 1° settaggio	Rendimento FTSE Mib	Deviazione standard (σ)
02/05/2017	0,91%	0,60%	1,19%
03/05/2017	-0,78%	0,13%	
04/05/2017	1,11%	1,96%	
05/05/2017	0,16%	1,47%	
08/05/2017	-0,64%	-0,26%	
09/05/2017	0,64%	0,27%	
10/05/2017	0,00%	0,31%	
11/05/2017	-0,13%	-0,33%	
12/05/2017	0,73%	0,43%	
15/05/2017	0,03%	0,60%	
16/05/2017	0,67%	0,38%	
17/05/2017	-2,95%	-2,34%	
18/05/2017	0,16%	0,07%	
19/05/2017	3,23%	1,25%	
22/05/2017	-0,59%	-1,16%	

23/05/2017	0,77%	0,45%
24/05/2017	-0,23%	-0,22%
25/05/2017	0,47%	-0,37%
26/05/2017	0,90%	-0,38%
29/05/2017	-1,99%	-2,03%
30/05/2017	-0,14%	0,15%
31/05/2017	-0,53%	-0,40%

Tabella 8: deviazione standard tra il portafoglio migliore del 1° settaggio e il rendimento del FTSE Mib

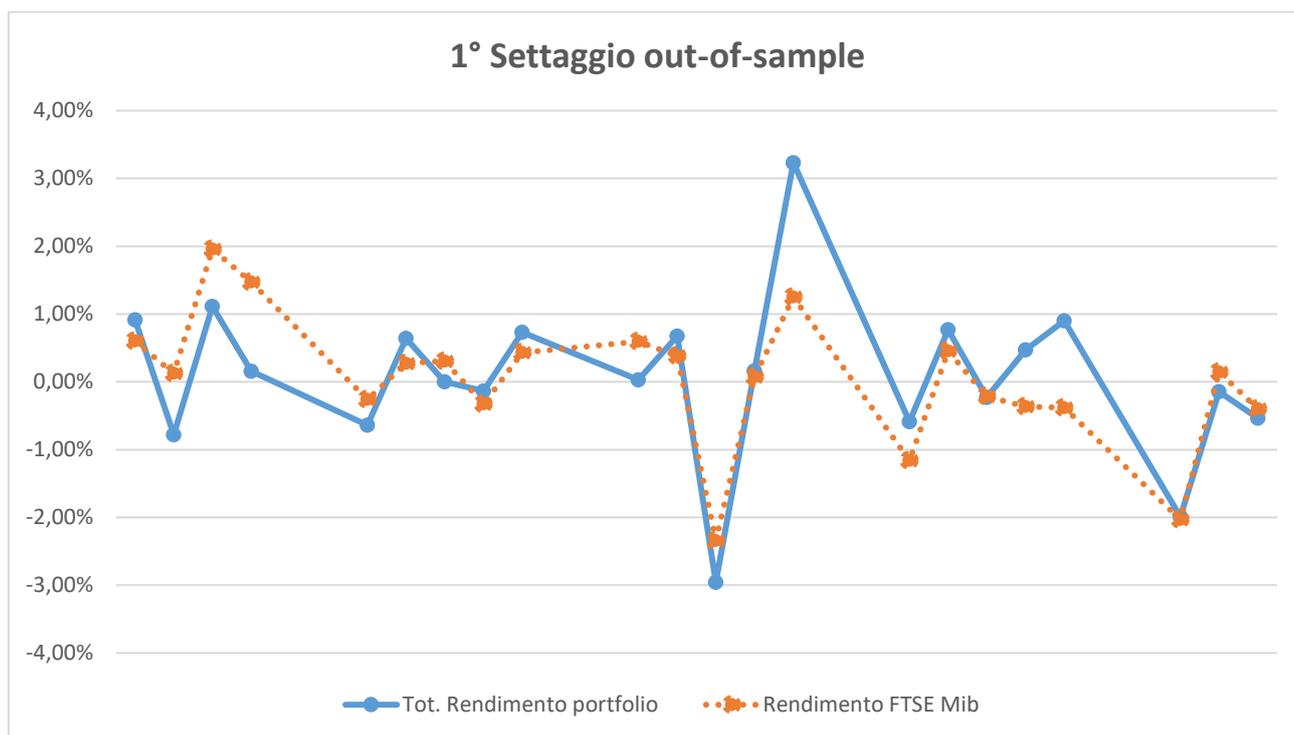


Grafico 20: rendimenti portfolio e FTSE Mib 1° settaggio

È possibile confrontare il portafoglio out-of-sample ottenuto nel primo settaggio con il portafoglio in-sample. Osservando la deviazione standard tra i rendimenti del portafoglio in-sample e i rendimenti del FTSE Mib è evidente come essa sia superiore alla deviazione standard del portafoglio out-of-sample. Le ragioni di questo miglioramento nell'out-of-sample risiedono nel fatto che il periodo considerato in-sample è molto più lungo rispetto al futuro virtuale e attraversato da momenti molto turbolenti. Si pensi che il 24/06/2016, giorno in cui è avvenuta Brexit, il FTSE Mib abbia subito una contrazione del 13,33%. Il grafico 21 evidenzia l'andamento del portafoglio in-sample rispetto al FTSE Mib.

Deviazione Standard in-sample (σ)	Deviazione standard out-of-sample (σ)
1,71%	1,19%

Tabella 9: deviazione standard in-sample e out-of-sample

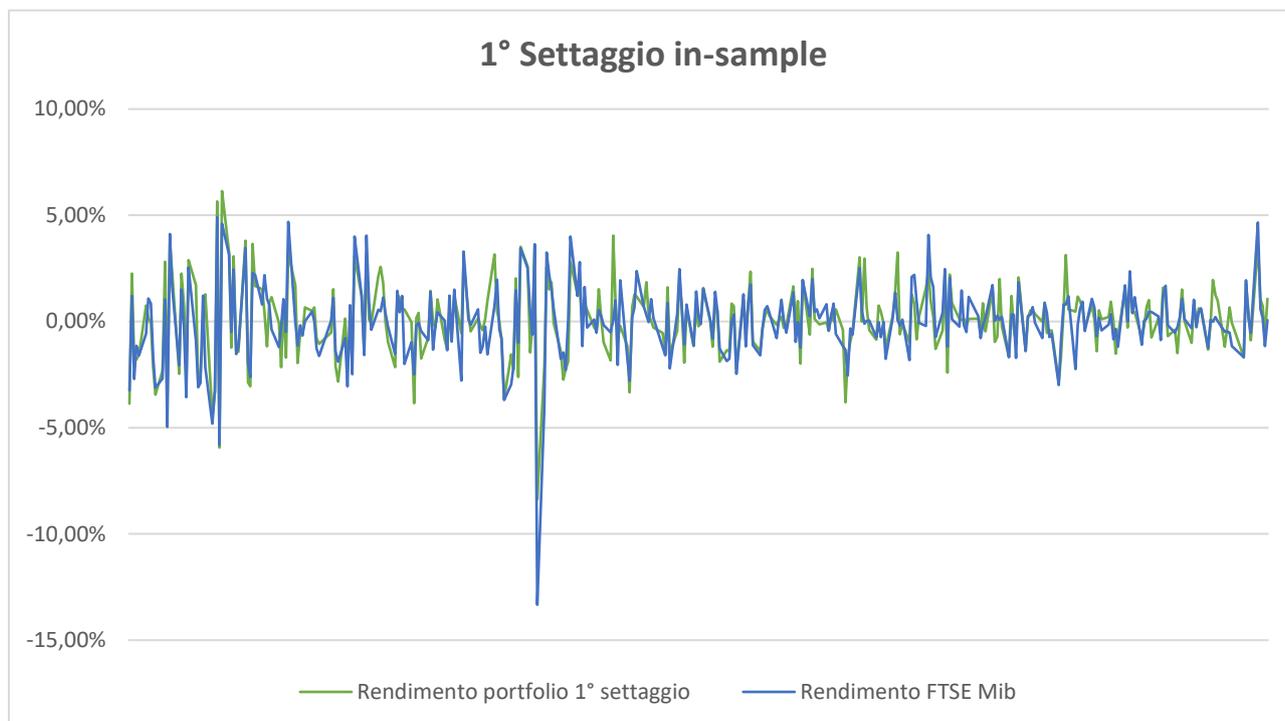


Grafico 21: rendimenti portfolio in-sample e FTSE Mib 1° settaggio

4.2 2° Settaggio out-of-sample

Per quanto riguarda il secondo settaggio, si nota come anche qui i pesi calcolati in-sample riescono ad essere soddisfacenti anche out-of sample presentando una deviazione standard σ relativamente bassa ad 1,23%. In alcuni casi infatti è evidente come il rendimento del portfolio sia simile al rendimento del FSTE Mib, tranne nei giorni 10/05/2017 e 12/05/2017. Tuttavia anche questi risultati rimangono accettabili. Dal grafico 21 è evidente come i due andamenti siano simili tra loro, tranne nei giorni elencati precedentemente, dove si è ottenuto un forte ribasso delle quotazioni di Prysmian dopo la diffusione dei dati trimestrali al di sotto delle aspettative.

Data	Tot. Rendimento portfolio 2° settaggio	Rendimento FTSE Mib	Deviazione standard (σ)
02/05/2017	1,04%	0,60%	1,23%
03/05/2017	-0,37%	0,13%	
04/05/2017	1,01%	1,96%	
05/05/2017	-0,17%	1,47%	
08/05/2017	-1,20%	-0,26%	
09/05/2017	0,58%	0,27%	
10/05/2017	-1,67%	0,31%	
11/05/2017	-0,46%	-0,33%	
12/05/2017	-1,09%	0,43%	
15/05/2017	0,28%	0,60%	
16/05/2017	-0,43%	0,38%	
17/05/2017	-2,73%	-2,34%	
18/05/2017	0,27%	0,07%	
19/05/2017	1,08%	1,25%	
22/05/2017	-0,40%	-1,16%	
23/05/2017	1,32%	0,45%	
24/05/2017	0,29%	-0,22%	
25/05/2017	-1,04%	-0,37%	
26/05/2017	1,54%	-0,38%	
29/05/2017	-2,71%	-2,03%	
30/05/2017	1,17%	0,15%	
31/05/2017	-0,43%	-0,40%	

Tabella 10: deviazione standard tra il portafoglio migliore del 2° settaggio e il rendimento del FTSE Mib

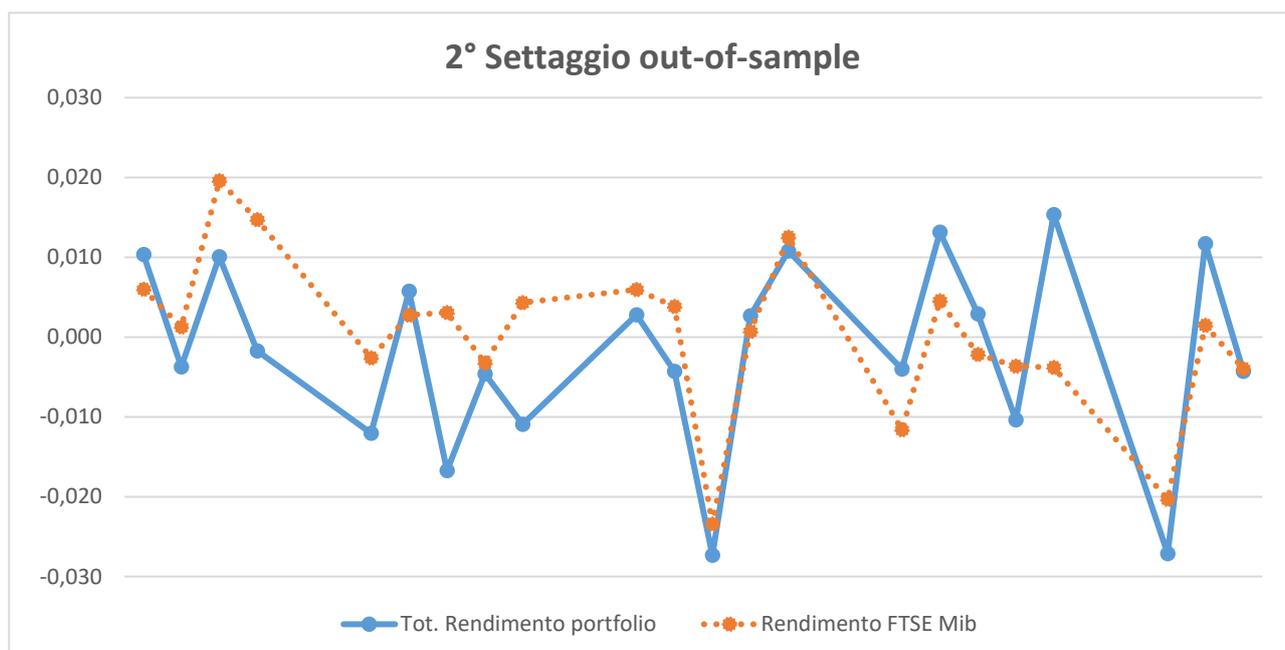


Grafico 22: rendimenti portfolio e FTSE Mib 2° settaggio

Anche in questo settaggio è possibile confrontare la deviazione standard in-sample con quella out-of-sample. Si nota come la deviazione standard in-sample sia superiore di quella out-of-sample per i motivi presentati nel paragrafo precedente.

Deviazione Standard in-sample (σ)	Deviazione standard out-of-sample (σ)
1,61%	1,23%

Tabella 11: deviazione standard in-sample e out-of-sample

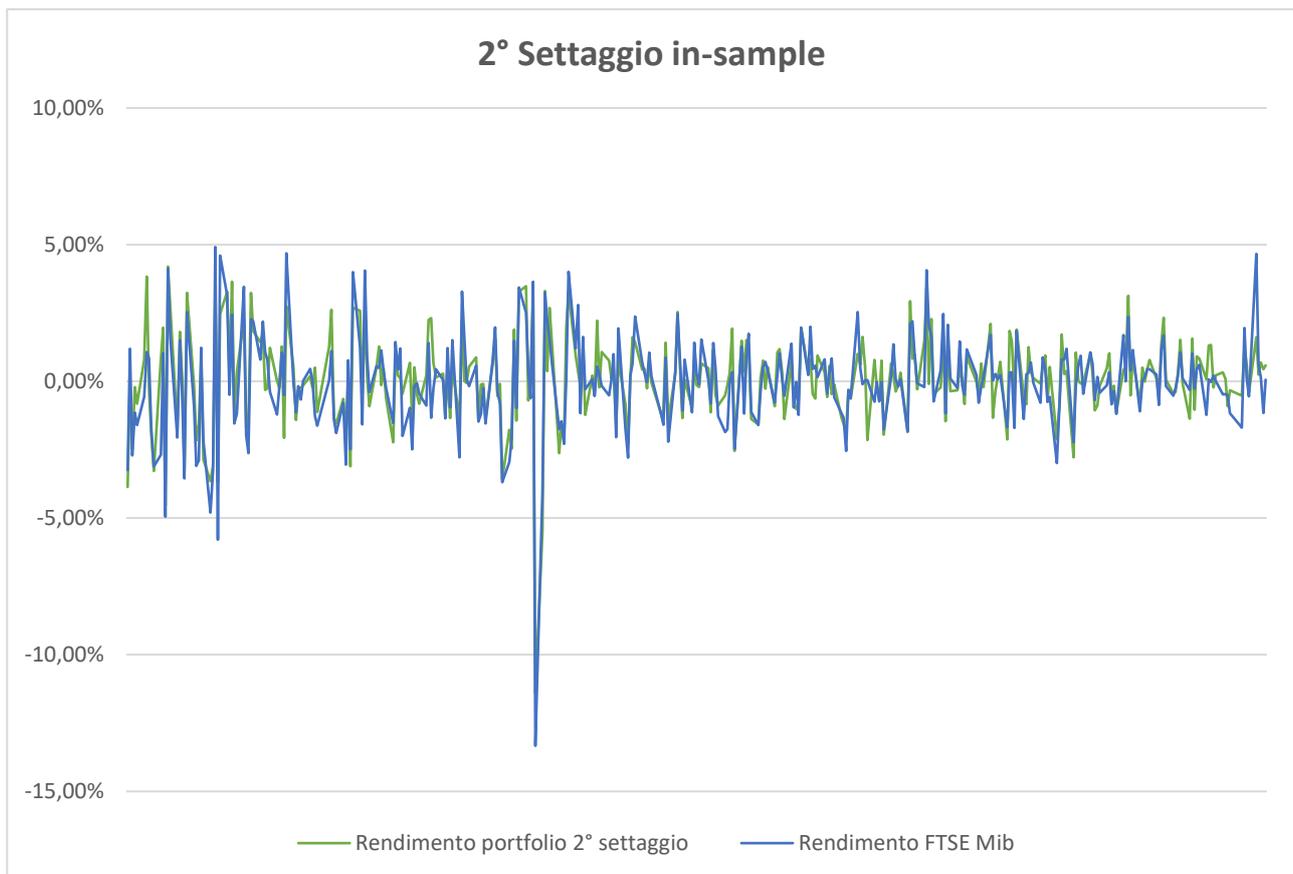


Grafico 23: rendimenti portfolio in-sample e FTSE Mib 2° settaggio

4.3 3° Settaggio out-of-sample

Nel terzo portafoglio migliore, risultante dal terzo settaggio, è possibile notare come anche qui i risultati della deviazione standard siano accettabili e soddisfacenti, per la precisione 1,64%. Osservando poi il grafico 22 si osserva come, anche in questo caso, gli andamenti del portfolio e del FTSE Mib siano simili. Evidente è la differenza però

nel primo giorno del mese utile ai fini del calcolo della σ , dove le quotazioni di FCA hanno subito un forte ribasso dovuto al calo di vendite subito negli USA rispetto all'anno scorso.

Data	Tot. Rendimento portfolio 3° settaggio	Rendimento FTSE Mib	Deviazione standard (σ)
02/05/2017	-2,42%	0,60%	1,64%
03/05/2017	0,71%	0,13%	
04/05/2017	1,62%	1,96%	
05/05/2017	0,72%	1,47%	
08/05/2017	-0,66%	-0,26%	
09/05/2017	0,21%	0,27%	
10/05/2017	0,86%	0,31%	
11/05/2017	-2,26%	-0,33%	
12/05/2017	0,06%	0,43%	
15/05/2017	1,27%	0,60%	
16/05/2017	-0,31%	0,38%	
17/05/2017	-3,63%	-2,34%	
18/05/2017	-2,37%	0,07%	
19/05/2017	3,02%	1,25%	
22/05/2017	-0,022	-0,012	
23/05/2017	-0,15%	0,45%	
24/05/2017	-0,10%	-0,22%	
25/05/2017	-0,53%	-0,37%	
26/05/2017	0,20%	-0,38%	
29/05/2017	-2,23%	-2,03%	
30/05/2017	-0,12%	0,15%	
31/05/2017	0,55%	-0,40%	

Tabella 12: deviazione standard tra il portafoglio migliore del 3° settaggio e il rendimento del FTSE Mib

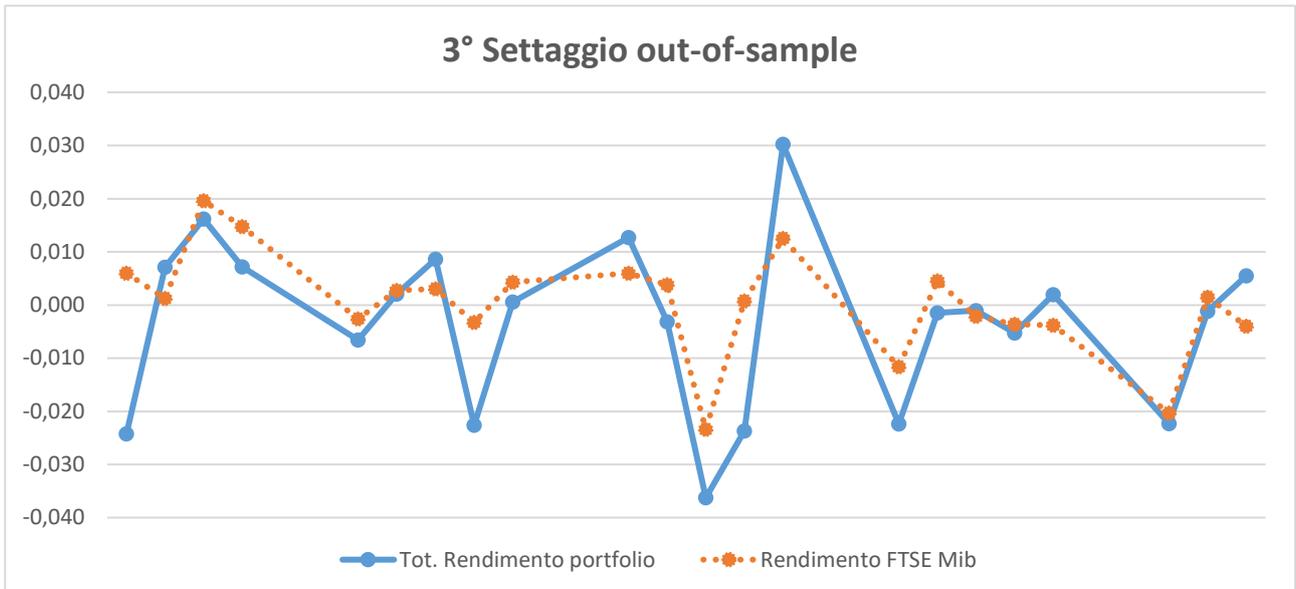


Grafico 24: rendimenti portfolio e FTSE Mib 3° settaggio

Confrontando la deviazione standard in-sample e quella out-of-sample si verifica lo stesso risultato degli altri due settaggi. Si nota infatti come la σ out-of-sample sia minore rispetto quella in-sample.

Deviazione standard in-sample (σ)	Deviazione standard out-of-sample (σ)
2,48%	1,64%

Tabella 13: deviazione standard in-sample e out-of-sample

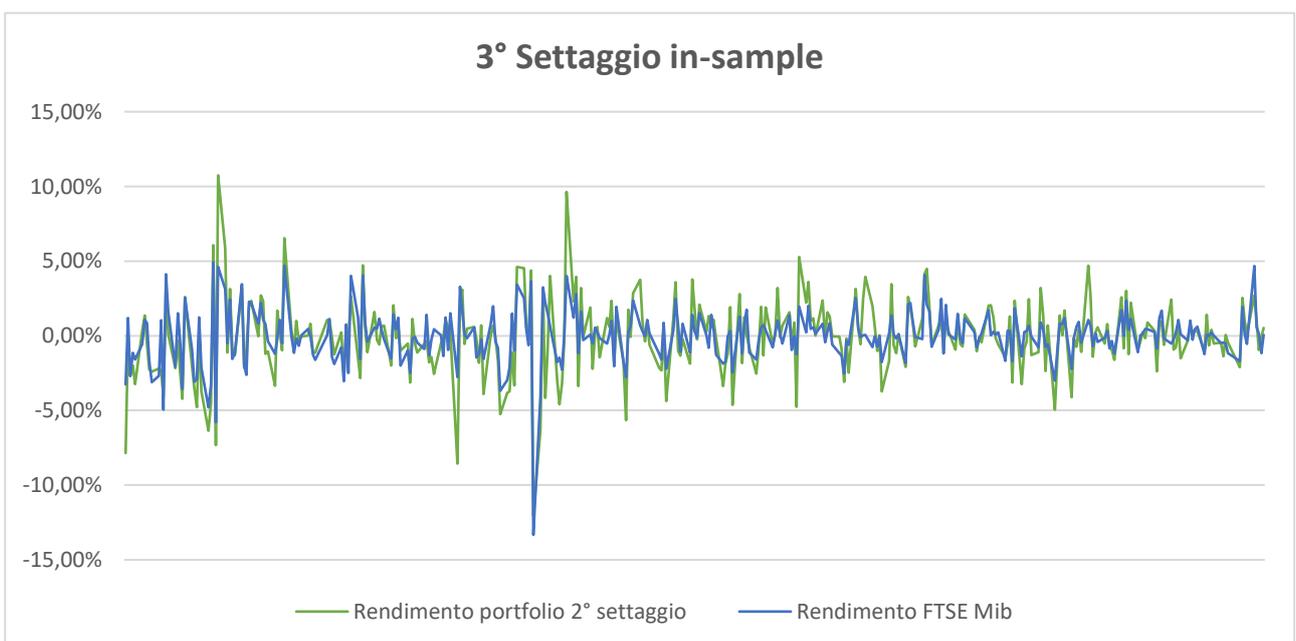


Grafico 25: rendimenti portfolio in-sample e FTSE Mib 3° settaggio

Conclusioni

In questo elaborato è stato affrontato e analizzato un problema di minimizzazione del Tracking Error di un portfolio rispetto al FTSE Mib sotto due punti di vista. Il primo riguarda la selezione del portafoglio mediante il modello utilizzato da Jansen e van Dijk, opportunamente modificato con l'inserimento del vincolo $Kd < |\{i|h_i > 0\}| < Ku$, dove Kd numero minimo di titoli detenibili nel portafoglio e Ku numero massimo. Il secondo riguarda l'applicazione della PSO come metodo risolutivo del modello in modo da semplificare il processo di risoluzione cercando di ottenere soluzioni che si avvicinino a quella ottima. Sui risultati ottenuti quindi si possono fare alcune osservazioni.

La prima osservazione riguarda la PSO. La meta-euristica applicata ha comportato numerosi vantaggi rispetto al metodo di risoluzione utilizzato da Jansen e van Dijk come detto precedentemente. Essa, inoltre, ha generato soluzioni in-sample soddisfacenti. Infatti i portafogli generati direttamente da Matlab presentavano alcune violazioni dei vincoli di non negatività e dei pesi uguali ad 1, ma per quanto riguarda il vincolo del numero di titoli detenibili solo in alcuni casi è avvenuta la violazione. I portafogli poi sottoposti al refinement si presentavano accettabili e utilizzabili per l'applicazione out-of-sample. Un ulteriore aspetto interessante riguarda come, aumentando le particelle nelle varie configurazioni, il valore della funzione di fitness dei portafogli migliori ottenuti diminuisca pressappoco del 70%. Sebbene all'aumentare del numero di particelle e di iterazioni il tempo computazionale risulta essere maggiore, i risultati ottenuti sono migliori. La PSO, tuttavia, in alcuni casi genera delle quote d'investimento molto basse, molto vicine allo zero, rendendo così difficile l'inserimento del titolo con quella percentuale d'investimento.

La seconda osservazione può essere fatta prendendo in considerazione l'applicazione dei parametri stimati in-sample al periodo out-of-sample. Vengono alternati giorni in cui l'andamento del portafoglio coincide con quello del FTSE Mib, a giorni in cui l'andamento è opposto. Questa discrepanza tra portafoglio e FTSE Mib è riconducibile al calo del prezzo di un titolo dovuto alla bocciatura da parte degli analisti dopo l'emissione dei dati intermedi al di sotto delle aspettative, come successo per FCA e Prysmian. In generale però i risultati ottenuti out-of-sample si possono considerare accettabili in quanto il portafoglio riesce a replicare approssimativamente l'andamento del benchmark e la deviazione standard per i 3 settaggi è rispettivamente:

1. 1,19%;
2. 1,23%;
3. 1,64%.

Questi tre valori sono inoltre nettamente migliori rispetto ai valori della deviazione standard calcolata in-sample. La causa può essere riscontrata nel fatto che l'arco temporale considerato in-sample sia più lungo rispetto a quello out-of-sample e perciò caratterizzato da periodi molto turbolenti, come ad esempio Brexit.

Si può quindi concludere che la PSO sia una meta-euristica che riesce ad essere applicata anche in questo problema di minimizzazione del Tracking-Error fornendo dei risultati non ottimi, ma vicini ad essi.

Appendice A

Di seguito vengono proposti i risultati senza modifiche derivanti da Matlab. La prima colonna rappresenta i pesi ottimi espressi in percentuale, cioè la percentuale di investimento sul titolo. La seconda colonna rappresenta i titoli selezionati, cioè quelli con valore superiore a 0,5.

Kd = 5 e Ku = 10

80 particelle 5000 iterazioni

Prova 3 **Portafoglio**

Titoli	Pesi	Titoli
A2a	8,67%	0,00
Atlantia	-0,11%	0,00
Azimut holding	0,00%	0,40
Banca Generali	0,52%	1,00
Banca Mediolanum	0,00%	0,00
Banco Bpm	0,00%	1,00
Bper Banca	0,00%	0,01
Brembo	0,00%	0,00
Buzzi Unicem	7,67%	-0,03
Campari	0,00%	1,00
Cnh industrial	2,47%	0,00
Enel	0,00%	0,00
Eni	0,24%	0,00
Exor	0,00%	0,00
Ferrari	0,00%	1,00
Fiat Chrysler Automobiles	0,00%	0,00
Fincobank	0,00%	0,00
Generali	0,16%	0,00
Intesa San Paolo	0,02%	0,00
Leonardo	0,00%	0,00
Luxottica	0,00%	1,00
Mediaset	-1,90%	1,00
Mediobanca	11,20%	1,00
Moncler	0,01%	0,00
Poste Italiane	0,00%	0,00
Prysmian	-0,12%	0,00
Recordati	0,00%	0,16
Saipem	12,59%	0,00
Salvatore Ferragamo	0,00%	0,00
Snam	0,01%	0,00
Stmicroelectronics	8,45%	0,00

Telecom Italia	0,00%	0,01
Tenaris	0,00%	0,15
Terna - rete elettrica nazionale	-0,51%	0,00
Ubi banca	0,00%	0,00
Unicredit	50,55%	0,00
Unipol	0,00%	0,00
Unipolsai	0,09%	0,99
Yoox Net-A-Porter group	0,00%	0,00

Numero di particelle	80
Numero di iterazioni	5000
Fitness	5973,77
rho (misura di rischio)	0,000070640
Vincolo somma pesi (somma_pesi-1)	0,00000000061418
Vincolo cardinalità Kd	0
Vincolo cardinalità Ku	0
Vincolo di non negatività	2,11

80 particelle, 10000 iterazioni

Prova 5 **Portafoglio**

Titoli	Pesi	Titoli
A2a	0,11%	0,00
Atlantia	-2,84%	0,00
Azimut holding	2,46%	0,00
Banca Generali	0,03%	0,00
Banca Mediolanum	0,00%	0,03
Banco Bpm	-12,05%	0,00
Bper Banca	0,01%	0,00
Brembo	0,00%	0,02
Buzzi Unicem	0,00%	0,04
Campari	0,00%	0,10
Cnh industrial	9,05%	1,00
Enel	21,17%	0,00
Eni	36,43%	0,00
Exor	0,00%	0,00
Ferrari	0,00%	1,00
Fiat Chrysler Automobiles	0,53%	0,00
Fincobank	0,00%	0,00
Generali	-8,87%	0,00
Intesa San Paolo	0,00%	0,86

Leonardo	0,67%	0,00
Luxottica	-0,08%	0,00
Mediaset	0,01%	0,00
Mediobanca	0,02%	0,00
Moncler	0,00%	0,00
Poste Italiane	0,00%	0,00
Prysmian	0,24%	0,00
Recordati	2,49%	1,00
Saipem	0,45%	0,00
Salvatore Ferragamo	0,00%	0,00
Snam	2,48%	0,00
Stmicroelectronics	0,15%	1,00
Telecom Italia	0,00%	1,00
Tenaris	0,00%	1,00
Terna - rete elettrica nazionale	4,41%	1,00
Ubi banca	0,00%	0,00
Unicredit	1,23%	1,00
Unipol	41,72%	0,00
Unipolsai	0,00%	0,00
Yoox Net-A-Porter group	0,19%	0,00

Numero di particelle	80
Numero di iterazioni	10000
Fitness	5.447,18
rho (misura di rischio)	0,000019693
Vincolo somma pesi (somma_pesi-1)	0,00000000010531
Vincolo cardinalità Kd	0
Vincolo cardinalità Ku	0
Vincolo di non negatività	19,07

160 particelle 5000 iterazioni

Prova 1 **Portafoglio**

Titoli	Pesi	Titoli
A2a	4,78%	0,00
Atlantia	0,00%	0,01
Azimut holding	1,42%	1,00
Banca Generali	0,77%	0,00
Banca Mediolanum	22,48%	0,00
Banco Bpm	31,38%	0,00

Bper Banca	2,34%	1,00
Brembo	0,00%	0,00
Buzzi Unicem	-8,75%	0,00
Campari	0,03%	0,00
Cnh industrial	0,01%	0,00
Enel	0,55%	1,00
Eni	6,67%	0,00
Exor	5,85%	1,00
Ferrari	0,01%	1,00
Fiat Chrysler Automobiles	0,00%	0,00
Fincobank	5,34%	0,00
Generali	0,02%	0,00
Intesa San Paolo	1,70%	0,00
Leonardo	4,38%	0,00
Luxottica	0,01%	0,00
Mediaset	0,04%	0,00
Mediobanca	0,31%	0,00
Moncler	0,08%	0,00
Poste Italiane	0,04%	0,00
Prysmian	-0,53%	0,00
Recordati	0,00%	0,08
Saipem	0,03%	0,00
Salvatore Ferragamo	0,00%	0,20
Snam	0,00%	0,03
Stmicroelectronics	3,81%	0,00
Telecom Italia	0,50%	1,00
Tenaris	0,06%	1,00
Terna - rete elettrica nazionale	6,47%	0,00
Ubi banca	8,98%	0,00
Unicredit	0,65%	0,00
Unipol	0,36%	0,00
Unipolsai	0,09%	0,00
Yoox Net-A-Porter group	0,13%	0,00

Numero di particelle	160
Numero di iterazioni	5000
Fitness	3622,00
rho (misura di rischio)	0,0000745500
Vincolo somma pesi (somma_pesi-1)	0,00000042530
Vincolo cardinalità Kd	0
Vincolo cardinalità Ku	0
Vincolo di non negatività	14,85

160 particelle 10000 iterazioni

Prova 4 **Portafoglio**

Titoli	Pesi	Titoli
A2a	-0,14%	1,00
Atlantia	0,00%	0,00
Azimut holding	0,03%	0,00
Banca Generali	0,00%	1,00
Banca Mediolanum	0,00%	0,00
Banco Bpm	0,00%	0,01
Bper Banca	0,00%	0,00
Brembo	0,00%	1,00
Buzzi Unicem	36,38%	0,00
Campari	-0,02%	0,00
Cnh industrial	0,00%	0,00
Enel	0,04%	0,00
Eni	0,00%	0,00
Exor	0,00%	0,00
Ferrari	0,00%	0,00
Fiat Chrysler Automobiles	0,00%	1,00
Fincobank	-0,05%	1,00
Generali	-14,51%	0,00
Intesa San Paolo	0,00%	0,00
Leonardo	0,00%	0,00
Luxottica	0,01%	1,00
Mediaset	0,12%	0,00
Mediobanca	0,00%	1,00
Moncler	0,00%	0,00
Poste Italiane	0,00%	-0,02
Prysmian	0,00%	0,00
Recordati	0,00%	0,00
Saipem	0,00%	0,99
Salvatore Ferragamo	0,00%	0,00
Snam	0,05%	0,00
Stmicroelectronics	74,73%	-0,01
Telecom Italia	-1,17%	1,00
Tenaris	0,00%	0,00
Terna - rete elettrica nazionale	4,83%	1,00
Ubi banca	0,00%	0,00
Unicredit	0,00%	0,00
Unipol	0,00%	0,00
Unipolsai	0,00%	0,00
Yoox Net-A-Porter group	-0,30%	0,00

Numero di iterazioni	10000
Fitness	2149,42
rho (misura di rischio)	0,000073240
Vincolo somma pesi (somma_pes-1)	0,00000000393430
Vincolo cardinalità Kd	0
Vincolo cardinalità Ku	0
Vincolo di non negatività	25,90

Kd=10 e Ku=15

80 particelle 5000 iterazioni

Prova 4
Portafoglio

Titoli	Pesi	Titoli
A2a	0,13%	0,00
Atlantia	0,00%	1,03
Azimut holding	0,00%	0,00
Banca Generali	0,68%	1,00
Banca Mediolanum	0,00%	0,00
Banco Bpm	0,05%	0,00
Bper Banca	6,01%	0,00
Brembo	1,99%	1,00
Buzzi Unicem	0,01%	0,00
Campari	0,00%	1,00
Cnh industrial	0,00%	0,00
Enel	0,00%	0,00
Eni	0,00%	-0,01
Exor	0,00%	1,00
Ferrari	0,00%	0,00
Fiat Chrysler Automobiles	0,01%	0,00
Fincobank	0,00%	0,20
Generali	1,75%	0,00
Intesa San Paolo	0,23%	0,00
Leonardo	0,00%	0,00
Luxottica	8,52%	0,00
Mediaset	0,00%	0,00
Mediobanca	38,15%	1,00
Moncler	0,01%	0,00
Poste Italiane	-5,93%	1,00
Prismian	17,91%	0,00
Recordati	2,79%	0,00
Saipem	-0,02%	1,00
Salvatore Ferragamo	-0,08%	0,00

Snam	-1,88%	1,04
Stmicroelectronics	9,99%	0,00
Telecom Italia	0,00%	0,06
Tenaris	6,81%	1,00
Terna - rete elettrica nazionale	0,22%	0,00
Ubi banca	0,00%	1,00
Unicredit	0,00%	0,00
Unipol	6,39%	0,00
Unipolsai	0,00%	0,42
Yoox Net-A-Porter group	6,25%	0,00

Numero di particelle	80
Numero di iterazioni	5000
Fitness	6314,49
rho (misura di rischio)	0,00002503400
Vincolo somma pesi (somma_pesi-1)	0,00000017066
Vincolo cardinalità Kd	0
Vincolo cardinalità Ku	0
Vincolo di non negatività	6,32

Particelle 80 10000 iterazioni

93

Prova 5 **Portafoglio**

Titoli	Pesi	Titoli
A2a	-0,05%	1,00
Atlantia	0,42%	0,00
Azimut holding	0,00%	0,99
Banca Generali	-0,78%	0,00
Banca Mediolanum	0,00%	0,00
Banco Bpm	0,00%	1,00
Bper Banca	0,00%	0,00
Brembo	0,00%	0,24
Buzzi Unicem	0,00%	0,00
Campari	0,00%	0,00
Cnh industrial	0,00%	0,00
Enel	0,00%	0,00
Eni	0,00%	0,00
Exor	23,21%	0,91
Ferrari	0,00%	0,00
Fiat Chrysler Automobiles	17,86%	0,00
Fincobank	0,00%	0,00
Generali	0,00%	1,00

Intesa San Paolo	0,00%	-0,03
Leonardo	0,26%	1,00
Luxottica	36,45%	0,00
Mediaset	0,00%	0,00
Mediobanca	0,00%	0,04
Moncler	0,02%	1,00
Poste Italiane	0,00%	1,00
Prysmian	0,00%	1,00
Recordati	0,00%	0,00
Saipem	0,00%	0,00
Salvatore Ferragamo	0,00%	1,00
Snam	0,00%	1,00
Stmicroelectronics	-12,04%	0,00
Telecom Italia	0,00%	0,98
Tenaris	-0,68%	0,00
Terna - rete elettrica nazionale	-1,78%	0,00
Ubi banca	-2,25%	1,00
Unicredit	0,00%	0,05
Unipol	39,36%	0,00
Unipolsai	0,00%	0,00
Yoox Net-A-Porter group	-0,01%	0,00

Numero di particelle	80
Numero di iterazioni	10000
Fitness	5941,53
rho (misura di rischio)	0,00004385
Vincolo somma pesi (somma_pesi-1)	0,000000002177600000
Vincolo cardinalità Kd	0
Vincolo cardinalità Ku	0
Vincolo di non negatività	14,0707

160 particelle 5000 iterazioni

Prova 4 **Portafoglio**

Titoli	Pesi	Titoli
A2a	0,00%	0,00
Atlantia	0,00%	0,00
Azimut holding	0,01%	0,00
Banca Generali	0,00%	0,00
Banca Mediolanum	0,04%	0,00
Banco Bpm	0,00%	0,00
Bper Banca	0,51%	1,00

Brembo	0,00%	0,00
Buzzi Unicem	-0,37%	0,00
Campari	13,14%	0,00
Cnh industrial	4,61%	1,00
Enel	0,00%	0,00
Eni	0,00%	0,00
Exor	0,00%	0,00
Ferrari	-5,18%	0,00
Fiat Chrysler Automobiles	0,03%	0,00
Fincobank	0,11%	0,00
Generali	0,00%	1,00
Intesa San Paolo	0,00%	0,00
Leonardo	0,00%	0,03
Luxottica	0,00%	0,00
Mediaset	0,01%	0,00
Mediobanca	0,00%	0,00
Moncler	1,37%	0,00
Poste Italiane	20,11%	-0,01
Prysmian	3,31%	0,00
Recordati	0,00%	1,00
Saipem	-8,10%	1,00
Salvatore Ferragamo	-5,24%	0,00
Snam	0,00%	0,01
Stmicroelectronics	0,00%	0,00
Telecom Italia	0,03%	1,00
Tenaris	0,00%	0,00
Terna - rete elettrica nazionale	0,02%	0,00
Ubi banca	4,47%	0,00
Unicredit	0,00%	0,99
Unipol	0,00%	1,00
Unipolsai	34,58%	1,00
Yoox Net-A-Porter group	36,52%	1,00

Numero di particelle	160
Numero di iterazioni	5000
Fitness	2479,93
rho (misura di rischio)	0,000034468
Vincolo somma pesi (somma_pesi-1)	0,000000597120000
Vincolo cardinalità Kd	0
Vincolo cardinalità Ku	0
Vincolo di non negatività	30,2302

160 particelle, 10000 iterazioni

Prova 4 **Portafoglio**

Titoli	Pesi	Titoli
A2a	0,00%	0,00
Atlantia	-1,14%	0,00
Azimut holding	0,00%	0,00
Banca Generali	0,00%	0,00
Banca Mediolanum	0,00%	0,00
Banco Bpm	0,83%	0,00
Bper Banca	0,00%	0,00
Brembo	0,00%	0,00
Buzzi Unicem	3,27%	0,00
Campari	0,00%	-0,01
Cnh industrial	0,00%	0,00
Enel	0,00%	1,00
Eni	4,37%	1,00
Exor	0,00%	1,01
Ferrari	0,00%	1,00
Fiat Chrysler Automobiles	0,00%	-0,01
Fincobank	12,60%	1,00
Generali	0,00%	0,00
Intesa San Paolo	0,00%	1,00
Leonardo	0,00%	0,00
Luxottica	0,00%	0,00
Mediaset	0,00%	0,00
Mediobanca	0,49%	1,00
Moncler	28,46%	1,00
Poste Italiane	0,00%	0,00
Prysmian	30,37%	1,00
Recordati	2,08%	0,00
Saipem	0,00%	1,00
Salvatore Ferragamo	-0,57%	0,00
Snam	0,00%	0,06
Stmicroelectronics	0,00%	0,00
Telecom Italia	0,58%	0,00
Tenaris	5,00%	0,00
Terna - rete elettrica nazionale	13,94%	0,00
Ubi banca	0,80%	1,00
Unicredit	0,00%	1,00
Unipol	-1,10%	1,00
Unipolsai	0,00%	0,00
Yoox Net-A-Porter group	0,00%	0,00

Numero di iterazioni	10000
Fitness	1282,10
rho (misura di rischio)	0,000020549
Vincolo somma pesi (somma_pesi-1)	0,00000000000013702
Vincolo cardinalità Kd	0
Vincolo cardinalità Ku	0
Vincolo di non negatività	4,4903

Kd=15 Ku=20

80 particelle, 5000 iterazioni

Prova 2
Portafoglio

Titoli	Pesi	Titoli
A2a	0,00%	0,00
Atlantia	0,00%	1,00
Azimut holding	0,00%	1,00
Banca Generali	14,54%	0,91
Banca Mediolanum	-7,74%	0,00
Banco Bpm	0,00%	0,00
Bper Banca	0,00%	0,00
Brembo	0,00%	0,48
Buzzi Unicem	0,00%	0,00
Campari	0,46%	0,00
Cnh industrial	0,00%	-0,04
Enel	0,00%	0,03
Eni	15,66%	0,00
Exor	0,00%	0,00
Ferrari	0,01%	0,00
Fiat Chrysler Automobiles	0,62%	0,00
Fincobank	0,00%	0,03
Generali	2,86%	1,00
Intesa San Paolo	0,00%	1,11
Leonardo	0,00%	0,00
Luxottica	0,00%	0,57
Mediaset	0,00%	0,00
Mediobanca	0,00%	1,00
Moncler	-24,46%	0,00
Poste Italiane	-0,03%	0,00
Prysmian	0,10%	1,00
Recordati	2,65%	0,00
Saipem	0,00%	1,00
Salvatore Ferragamo	22,36%	1,00
Snam	0,00%	1,00

Stmicroelectronics	21,91%	0,00
Telecom Italia	0,00%	0,04
Tenaris	0,00%	1,00
Terna - rete elettrica nazionale	0,10%	0,00
Ubi banca	0,08%	1,00
Unicredit	5,40%	0,00
Unipol	-0,44%	0,00
Unipolsai	0,00%	1,00
Yoox Net-A-Porter group	45,92%	1,00

Numero di particelle	80
Numero di iterazioni	10000
Fitness	11605,29
rho (misura di rischio)	0,000048349
Vincolo somma pesi (somma_pes-1)	0,000000000029501000
Vincolo cardinalità Kd	0,00
Vincolo cardinalità Ku	0,00
Vincolo di non negatività	26,14410

80 particelle, 10000 iterazioni

Prova 4 **Portafoglio**

98

Titoli	Pesi	Titoli
A2a	-6,39%	0,00
Atlantia	0,04%	0,00
Azimut holding	0,00%	1,00
Banca Generali	2,75%	1,00
Banca Mediolanum	0,00%	0,08
Banco Bpm	0,00%	0,38
Bper Banca	-6,31%	0,00
Brembo	3,94%	1,00
Buzzi Unicem	0,18%	1,00
Campari	1,17%	0,00
Cnh industrial	0,00%	1,00
Enel	0,00%	1,00
Eni	0,08%	0,00
Exor	0,00%	0,46
Ferrari	34,77%	0,00
Fiat Chrysler Automobiles	0,04%	0,00
Fincobank	0,00%	0,00
Generali	1,21%	1,00
Intesa San Paolo	0,01%	0,65
Leonardo	8,03%	0,00

Luxottica	4,17%	1,00
Mediaset	0,01%	1,00
Mediobanca	0,00%	0,00
Moncler	0,00%	1,00
Poste Italiane	0,06%	0,00
Prysmian	0,06%	1,00
Recordati	0,13%	0,00
Saipem	19,36%	0,00
Salvatore Ferragamo	0,02%	1,00
Snam	0,09%	1,00
Stmicroelectronics	0,00%	0,02
Telecom Italia	0,05%	0,00
Tenaris	0,16%	0,00
Terna - rete elettrica nazionale	0,05%	0,00
Ubi banca	0,04%	0,00
Unicredit	27,30%	1,00
Unipol	0,56%	0,00
Unipolsai	0,00%	0,00
Yoox Net-A-Porter group	8,43%	1,00

Numero di particelle	80
Numero di iterazioni	5000
Fitness	9496,73
rho (misura di rischio)	0,00003945500000
Vincolo somma pesi (somma_pesi-1)	0,00000000973690
Vincolo cardinalità Kd	0,00
Vincolo cardinalità Ku	0,00
Vincolo di non negatività	10,16

160 particelle, 5000 iterazioni

Prova 2 Portafoglio

Titoli	Pesi	Titoli
A2a	0,00%	1,00
Atlantia	-4,03%	0,00
Azimut holding	0,11%	0,00
Banca Generali	9,29%	1,00
Banca Mediolanum	6,73%	0,00
Banco Bpm	0,00%	1,00
Bper Banca	0,03%	0,00
Brembo	0,00%	1,02
Buzzi Unicem	0,00%	1,00

Campari	0,00%	0,00
Cnh industrial	0,01%	0,00
Enel	0,00%	0,02
Eni	0,00%	0,01
Exor	9,06%	1,00
Ferrari	0,00%	0,00
Fiat Chrysler Automobiles	5,33%	0,00
Fincobank	0,00%	1,01
Generali	0,00%	0,00
Intesa San Paolo	18,79%	1,00
Leonardo	0,01%	1,00
Luxottica	0,00%	0,06
Mediaset	1,76%	0,00
Mediobanca	-0,01%	0,00
Moncler	-13,76%	1,00
Poste Italiane	0,14%	0,00
Prysmian	0,00%	0,01
Recordati	0,83%	0,00
Saipem	0,00%	1,00
Salvatore Ferragamo	0,01%	0,00
Snam	0,00%	0,00
Stmicroelectronics	0,01%	0,00
Telecom Italia	-0,54%	0,00
Tenaris	39,23%	0,00
Terna - rete elettrica nazionale	0,00%	0,00
Ubi banca	0,04%	1,00
Unicredit	0,03%	1,00
Unipol	26,94%	1,00
Unipolsai	-0,01%	0,00
Yoox Net-A-Porter group	0,00%	1,00

Numero di particelle	160
Numero di iterazioni	5000
Fitness	3171,58
rho (misura di rischio)	0,0000309
Vincolo somma pesi (somma_pesi-1)	0,0000000000118620
Vincolo cardinalità Kd	0
Vincolo cardinalità Ku	0
Vincolo di non negatività	29,37

160 particelle, 10000 iterazioni

Prova 5 Portafoglio

Titoli	Pesi	Titoli
A2a	0,00%	1,00
Atlantia	0,00%	0,00
Azimut holding	3,71%	0,00
Banca Generali	0,00%	0,23
Banca Mediolanum	4,67%	1,00
Banco Bpm	0,00%	0,00
Bper Banca	0,00%	1,00
Brembo	0,00%	0,00
Buzzi Unicem	0,02%	0,00
Campari	0,00%	1,00
Cnh industrial	0,06%	1,00
Enel	0,00%	1,00
Eni	0,79%	0,00
Exor	1,69%	0,00
Ferrari	0,00%	0,11
Fiat Chrysler Automobiles	49,73%	1,00
Fincobank	0,35%	0,00
Generali	0,35%	0,00
Intesa San Paolo	-2,30%	0,00
Leonardo	0,02%	0,00
Luxottica	0,01%	1,00
Mediaset	14,56%	0,00
Mediobanca	-0,15%	0,00
Moncler	0,00%	1,00
Poste Italiane	0,00%	1,00
Prismian	0,00%	1,00
Recordati	0,26%	1,00
Saipem	1,44%	0,00
Salvatore Ferragamo	0,00%	0,00
Snam	0,02%	0,00
Stmicroelectronics	0,00%	1,00
Telecom Italia	0,00%	0,00
Tenaris	0,00%	1,00
Terna - rete elettrica nazionale	0,14%	0,00
Ubi banca	0,00%	0,00
Unicredit	0,07%	0,00
Unipol	0,00%	0,00
Unipolsai	24,54%	1,00
Yoox Net-A-Porter group	0,01%	0,00

Numero di iterazioni	10000
Fitness	3071,72
rho (misura di rischio)	0,0000672670
Vincolo somma pesi (somma_pesi-1)	0,0000011885000000
Vincolo cardinalità Kd	0
Vincolo cardinalità Ku	0
Vincolo di non negatività	3,9316

APPENDICE B

Di seguito viene rappresentata l'elaborazione dei risultati ottenuti nelle prove presenti nell'appendice A.

Kd=5 e Ku=10

80 particelle, 5000 iterazioni

Prova 3

MIGLIORE

TITOLI	PORTAFOGLIO DEFINITIVO	
A2a	0%	0
Atlantia	0%	0
Azimut holding	0%	0
Banca Generali	4%	1
Banca Mediolanum	0%	0
Banco Bpm	0,0001%	1
Bper Banca	0%	0
Brembo	0%	0
Buzzi Unicem	0%	0
Campari	0%	1
Cnh industrial	0%	0
Enel	0%	0
Eni	0%	0
Exor	0%	0
Ferrari	0,0002%	1
Fiat Chrysler Automobiles	0%	0
Fincobank	0%	0
Generali	0%	0
Intesa San Paolo	0%	0
Leonardo	0%	0
Luxottica	0%	1
Mediaset	0%	1
Mediobanca	95%	1
Moncler	0%	0
Poste Italiane	0%	0
Prysmian	0%	0
Recordati	0%	0
Saipem	0%	0
Salvatore Ferragamo	0%	0
Snam	0%	0
Stmicroelectronics	0%	0
Telecom Italia	0%	0
Tenaris	0%	0
Terna - rete elettrica nazionale	0%	0

Ubi banca	0%	0
Unicredit	0%	0
Unipol	0%	0
Unipolsai	1%	1
Yoox Net-A-Porter group	0%	0

80 particelle, 10000 iterazioni

Prova 5

MIGLIORE

TITOLI	PORTAFOGLIO DEFINITIVO	
A2a	0%	0
Atlantia	0%	0
Azimut holding	0%	0
Banca Generali	0%	0
Banca Mediolanum	0%	0
Banco Bpm	0%	0
Bper Banca	0%	0
Brembo	0%	0
Buzzi Unicem	0%	0
Campari	0%	0
Cnh industrial	52%	1
Enel	0%	0
Eni	0%	0
Exor	0%	0
Ferrari	0,004%	1
Fiat Chrysler Automobiles	0%	0
Fincobank	0%	0
Generali	0%	0
Intesa San Paolo	0,001%	1
Leonardo	0%	0
Luxtistica	0%	0
Mediaset	0%	0
Mediobanca	0%	0
Moncler	0%	0
Poste Italiane	0%	0
Prysmian	0%	0
Recordati	14%	1
Saipem	0%	0
Salvatore Ferragamo	0%	0
Snam	0%	0
Stmicroelectronics	1%	1
Telecom Italia	0,000003%	1
Tenaris	0,00002%	1

Terna - rete elettrica nazionale	25%	1
Ubi banca	0%	0
Unicredit	7%	1
Unipol	0%	0
Unipolsai	0%	0
Yoox Net-A-Porter group	0%	0

160 particelle 5000 iterazioni

Prova 1

MIGLIORE

TITOLI	PORTAFOGLIO DEFINITIVO	
A2a	0%	0
Atlantia	0%	0
Azimut holding	13%	1
Banca Generali	0%	0
Banca Mediolanum	0%	0
Banco Bpm	0%	0
Bper Banca	22%	1
Brembo	0%	0
Buzzi Unicem	0%	0
Campari	0%	0
Cnh industrial	0%	0
Enel	5%	1
Eni	0%	0
Exor	54%	1
Ferrari	0,1%	1
Fiat Chrysler Automobiles	0%	0
Fincobank	0%	0
Generali	0%	0
Intesa San Paolo	0%	0
Leonardo	0%	0
Luxottica	0%	0
Mediaset	0%	0
Mediobanca	0%	0
Moncler	0%	0
Poste Italiane	0%	0
Prysmian	0%	0
Recordati	0%	0
Saipem	0%	0
Salvatore Ferragamo	0%	0
Snam	0%	0
Stmicroelectronics	0%	0
Telecom Italia	5%	1

Tenaris	1%	1
Terna - rete elettrica nazionale	0%	0
Ubi banca	0%	0
Unicredit	0%	0
Unipol	0%	0
Unipolsai	0%	0
Yoox Net-A-Porter group	0%	0

160 particelle, 10000 iterazioni

Prova 4

MIGLIORE

TITOLI	PORTAFOGLIO DEFINITIVO	
A2a	0%	1
Atlantia	0%	0
Azimut holding	0%	0
Banca Generali	0%	1
Banca Mediolanum	0%	0
Banco Bpm	0%	0
Bper Banca	0%	0
Brembo	0,00001%	1
Buzzi Unicem	0%	0
Campari	0%	0
Cnh industrial	0%	0
Enel	0%	0
Eni	0%	0
Exor	0%	0
Ferrari	0%	0
Fiat Chrysler Automobiles	0,0000002%	1
Fincobank	0%	1
Generali	0%	0
Intesa San Paolo	0%	0
Leonardo	0%	0
Luxottica	0,3%	1
Mediaset	0%	0
Mediobanca	0%	1
Moncler	0%	0
Poste Italiane	0%	0
Prysmian	0%	0
Recordati	0%	0
Saipem	0,000001%	1
Salvatore Ferragamo	0%	0
Snam	0%	0
Stmicroelectronics	0%	0

Telecom Italia	0%	1
Tenaris	0%	0
Terna - rete elettrica nazionale	99,7%	1
Ubi banca	0%	0
Unicredit	0%	0
Unipol	0%	0
Unipolsai	0%	0
Yoox Net-A-Porter group	0%	0

Kd = 10 e Ku = 15

80 particelle, 5000 iterazioni

Prova 4

MIGLIORE

TITOLI	PORTAFOGLIO DEFINITIVO	
A2a	0%	0
Atlantia	0,000002%	1
Azimut holding	0%	0
Banca Generali	1%	1
Banca Mediolanum	0%	0
Banco Bpm	0%	0
Bper Banca	0%	0
Brembo	4%	1
Buzzi Unicem	0%	0
Campari	0%	1
Cnh industrial	0%	0
Enel	0%	0
Eni	0%	0
Exor	0%	1
Ferrari	0%	0
Fiat Chrysler Automobiles	0%	0
Fincobank	0%	0
Generali	0%	0
Intesa San Paolo	0%	0
Leonardo	0%	0
Luxottica	0%	0
Mediaset	0%	0
Mediobanca	80%	1
Moncler	0%	0
Poste Italiane	0%	1
Prysmian	0%	0
Recordati	0%	0
Saipem	0%	1
Salvatore Ferragamo	0%	0

Snam	0%	1
Stmicroelectronics	0%	0
Telecom Italia	0%	0
Tenaris	14%	1
Terna - rete elettrica nazionale	0%	0
Ubi banca	0,000004%	1
Unicredit	0%	0
Unipol	0%	0
Unipolsai	0%	0
Yoox Net-A-Porter group	0%	0

80 particelle, 10000 iterazioni

Prova 5

MIGLIORE

TITOLI	PORTAFOGLIO DEFINITIVO	
A2a	0%	1
Atlantia	0%	0
Azimut holding	0,00001%	1
Banca Generali	0%	0
Banca Mediolanum	0%	0
Banco Bpm	0%	1
Bper Banca	0%	0
Brembo	0%	0
Buzzi Unicem	0%	0
Campari	0%	0
Cnh industrial	0%	0
Enel	0%	0
Eni	0%	0
Exor	99%	1
Ferrari	0%	0
Fiat Chrysler Automobiles	0%	0
Fincobank	0%	0
Generali	0,0001%	1
Intesa San Paolo	0%	0
Leonardo	1%	1
Luxottica	0%	0
Mediaset	0%	0
Mediobanca	0%	0
Moncler	0,10%	1
Poste Italiane	0%	1
Prysmian	0,0000004%	1
Recordati	0%	0
Saipem	0%	0

Salvatore Ferragamo	0,0001%	1
Snam	0,0004%	1
Stmicroelectronics	0%	0
Telecom Italia	0,000004%	1
Tenaris	0%	0
Terna - rete elettrica nazionale	0%	0
Ubi banca	0%	1
Unicredit	0%	0
Unipol	0%	0
Unipolsai	0%	0
Yoox Net-A-Porter group	0%	0

160 particelle, 5000 iterazioni

Prova 4

MIGLIORE

TITOLI	PORTAFOGLIO DEFINITIVO	
A2a	0%	0
Atlantia	0%	0
Azimut holding	0%	0
Banca Generali	0%	0
Banca Mediolanum	0%	0
Banco Bpm	0%	0
Bper Banca	1%	1
Brembo	0%	0
Buzzi Unicem	0%	0
Campari	0%	0
Cnh industrial	6%	1
Enel	0%	0
Eni	0%	0
Exor	0%	0
Ferrari	0%	0
Fiat Chrysler Automobiles	0%	0
Fincobank	0%	0
Generali	0%	1
Intesa San Paolo	0%	0
Leonardo	0%	0
Luxottica	0%	0
Mediaset	0%	0
Mediobanca	0%	0
Moncler	0%	0
Poste Italiane	0%	0
Prysmian	0%	0
Recordati	0,004%	1

Saipem	0%	1
Salvatore Ferragamo	0%	0
Snam	0%	0
Stmicroelectronics	0%	0
Telecom Italia	0,04%	1
Tenaris	0%	0
Terna - rete elettrica nazionale	0%	0
Ubi banca	0%	0
Unicredit	0,0005%	1
Unipol	0,0001%	1
Unipolsai	45%	1
Yoox Net-A-Porter group	48%	1

160 particelle 10000 iterazioni

Prova 4

MIGLIORE

TITOLI	PORTAFOGLIO DEFINITIVO	
A2a	0%	0
Atlantia	0%	0
Azimut holding	0%	0
Banca Generali	0%	0
Banca Mediolanum	0%	0
Banco Bpm	0%	0
Bper Banca	0%	0
Brembo	0%	0
Buzzi Unicem	0%	0
Campari	0%	0
Cnh industrial	0%	0
Enel	0%	1
Eni	6%	1
Exor	0%	1
Ferrari	0,001%	1
Fiat Chrysler Automobiles	0%	0
Fincobank	16%	1
Generali	0%	0
Intesa San Paolo	0,0000003%	1
Leonardo	0%	0
Luxottica	0%	0
Mediaset	0%	0
Mediobanca	1%	1
Moncler	37%	1
Poste Italiane	0%	0
Prysmian	39%	1

Recordati	0%	0
Saipem	0,01%	1
Salvatore Ferragamo	0%	0
Snam	0%	0
Stmicroelectronics	0%	0
Telecom Italia	0%	0
Tenaris	0%	0
Terna - rete elettrica nazionale	0%	0
Ubi banca	1%	1
Unicredit	0,000000001%	1
Unipol	0%	1
Unipolsai	0%	0
Yoox Net-A-Porter group	0%	0

Kd = 15 e Ku = 20

80 particelle 5000 iterazioni

Prova 2

MIGLIORE

TITOLI	PORTAFOGLIO DEFINITIVO	
A2a	0%	0
Atlantia	0%	1
Azimut holding	0,00000001%	1
Banca Generali	17%	1
Banca Mediolanum	0%	0
Banco Bpm	0%	0
Bper Banca	0%	0
Brembo	0%	0
Buzzi Unicem	0%	0
Campari	0%	0
Cnh industrial	0%	0
Enel	0%	0
Eni	0%	0
Exor	0%	0
Ferrari	0%	0
Fiat Chrysler Automobiles	0%	0
Fincobank	0%	0
Generali	3%	1
Intesa San Paolo	0,00000001%	1
Leonardo	0%	0
Luxottica	0,000001%	1
Mediaset	0%	0
Mediobanca	0%	1

Moncler	0%	0
Poste Italiane	0%	0
Prysmian	0,1%	1
Recordati	0%	0
Saipem	0,001%	1
Salvatore Ferragamo	26%	1
Snam	0,003%	1
Stmicroelectronics	0%	0
Telecom Italia	0%	0
Tenaris	0,00000005%	1
Terna - rete elettrica nazionale	0%	0
Ubi banca	0,1%	1
Unicredit	0%	0
Unipol	0%	0
Unipolsai	0%	1
Yoox Net-A-Porter group	53%	1

80 particelle 10000 iterazioni

Prova 4

MIGLIORE

TITOLI	PORTAFOGLIO DEFINITIVO	
A2a	0%	0
Atlantia	0%	0
Azimut holding	0,00001%	1
Banca Generali	6%	1
Banca Mediolanum	0%	0
Banco Bpm	0%	0
Bper Banca	0%	0
Brembo	8%	1
Buzzi Unicem	0,4%	1
Campari	0%	0
Cnh industrial	0,0000001%	1
Enel	0%	1
Eni	0%	0
Exor	0%	0
Ferrari	0%	0
Fiat Chrysler Automobiles	0%	0
Fincobank	0%	0
Generali	3%	1
Intesa San Paolo	0,01%	1
Leonardo	0%	0
Luxottica	9%	1
Mediaset	0,01%	1

Mediobanca	0%	0
Moncler	0,0000002%	1
Poste Italiane	0%	0
Prysmian	0,1%	1
Recordati	0%	0
Saipem	0%	0
Salvatore Ferragamo	0,03%	1
Snam	0,2%	1
Stmicroelectronics	0%	0
Telecom Italia	0%	0
Tenaris	0%	0
Terna - rete elettrica nazionale	0%	0
Ubi banca	0%	0
Unicredit	57%	1
Unipol	0%	0
Unipolsai	0%	0
Yoox Net-A-Porter group	18%	1

160 particelle 5000 iterazioni

Prova 2

MIGLIORE

113

TITOLI	PORTAFOGLIO DEFINITIVO	
A2a	0,002%	1
Atlantia	0%	0
Azimut holding	0%	0
Banca Generali	14%	1
Banca Mediolanum	0%	0
Banco Bpm	0%	1
Bper Banca	0%	0
Brembo	0,00000004%	1
Buzzi Unicem	0,003%	1
Campari	0%	0
Cnh industrial	0%	0
Enel	0%	0
Eni	0%	0
Exor	14%	1
Ferrari	0%	0
Fiat Chrysler Automobiles	0%	0
Fincobank	0,0000001%	1
Generali	0%	0
Intesa San Paolo	29%	1
Leonardo	0,01%	1
Luxottica	0%	0

Mediaset	0%	0
Mediobanca	0%	0
Moncler	0%	1
Poste Italiane	0%	0
Prysmian	0%	0
Recordati	0%	0
Saipem	0,0002%	1
Salvatore Ferragamo	0%	0
Snam	0%	0
Stmicroelectronics	0%	0
Telecom Italia	0%	0
Tenaris	0%	0
Terna - rete elettrica nazionale	0%	0
Ubi banca	0,1%	1
Unicredit	0,05%	1
Unipol	42%	1
Unipolsai	0%	0
Yoox Net-A-Porter group	0,00000002%	1

160 particelle 10000 iterazioni

Prova 5

114

MIGLIORE

TITOLI	PORTAFOGLIO DEFINITIVO	
A2a	0%	1
Atlantia	0%	0
Azimut holding	0%	0
Banca Generali	0%	0
Banca Mediolanum	6%	1
Banco Bpm	0%	0
Bper Banca	0,0001%	1
Brembo	0%	0
Buzzi Unicem	0%	0
Campari	0%	1
Cnh industrial	0,1%	1
Enel	0,0000000004%	1
Eni	0%	0
Exor	0%	0
Ferrari	0%	0
Fiat Chrysler Automobiles	63%	1
Fincobank	0%	0
Generali	0%	0
Intesa San Paolo	0%	0
Leonardo	0%	0

Luxottica	0,01%	1
Mediaset	0%	0
Mediobanca	0%	0
Moncler	0,001%	1
Poste Italiane	0,000000002%	1
Prysmian	0,0001%	1
Recordati	0,3%	1
Saipem	0%	0
Salvatore Ferragamo	0%	0
Snam	0%	0
Stmicroelectronics	0,000000003%	1
Telecom Italia	0%	0
Tenaris	0%	1
Terna - rete elettrica nazionale	0%	0
Ubi banca	0%	0
Unicredit	0%	0
Unipol	0%	0
Unipolsai	31%	1
Yoox Net-A-Porter group	0%	0

Appendice C

Codice Matlab per la PSO applicato al problema di Tracking Error Portfolio.

```
clc
close all
clear all
format long g

%%
Prezzi=xlsread('prezzi titoli FMxlsx');
Bench2=xlsread('Benchmarkxlsx');
[n,numvar]=size(Prezzi);
Rendimenti = log(Prezzi(2:end,:)/Prezzi(1:end-1,:)); % rendimenti logaritmici
Bench3 = log(Bench2(2:end,:)/Bench2(1:end-1,:)); % rendimenti logaritmici
%Bench = (Rendimenti(:,1)+Rendimenti(:,end))/2;
Bench = (Bench3(:,1)+Bench3(:,end))/2;
[T,numvar1]=size(Rendimenti);

variabile=2*numvar;
media=mean(Rendimenti);

%%
%P=2*variabile;
P=160;

tic

for giacomo=1:1
niter=10000;
c1=149618;
c2=149618;
w=07298;
chi=1;
a=chi*w;
W=chi*((c1*05)+(c2*05));
valore_max_W=2*(a+1);

%%
vmax_x=zeros(1,numvar);
vmax_z=zeros(1,numvar);
epsilon=10e-004; % penalizzazione dei vincoli
Delta_viol = zeros(P,1); % overall constraints violation x constraints weights

PSO_init = false; % choose PSO initialization: true= alternative
initialization, false= standard (random) initialization
RR(niter,1) = 00;

pesi_vinc = ones(8,1);

%% Inizializzazione y e vy

y=zeros(P,variabile);
vy=zeros(P,variabile);

rho=zeros(P,1);
R=zeros(P,1); % rendimento di portafoglio
vinc_1=zeros(P,1); % vincolo bilancio
vinc_2=zeros(P,1); % vincolo bilancio
app_1=zeros(P,numvar); % matrice dei pesi di ciascun titolo i per ciascuna
particella p
vinc_3=zeros(P,1); % vincolo non negatività
vinc_4=zeros(P,1); % vincolo di cardinalità
```

```

vinc_5=zeros(P,1);      % vincolo di cardinalità
app_2=zeros(P,numvar);

%% -----
%  SELECT PSO INITIALIZATION
%-----

x=y(:,1:numvar);
z=y(:,numvar+1:2*numvar);
vx=vy(:,1:numvar);
vz=vy(:,numvar+1:2*numvar);

% Inizializzazione STANDARD di PSO

x=rand(P,numvar);
vx=rand(P,numvar);
z=rand(P,numvar);
vz=rand(P,numvar);

%% Ottimizzazione

f=ones(P,1)*10e+015;
kd=15;
ku=20;
d=005*ones(1,numvar); % frazione minima
u=ones(1,numvar);    % frazione massima

x1=zeros(P,numvar);

pb_x=[x f]; % pbest: vettore delle migliori posizioni per ogni particella
          % l'ultima colonna dice il miglior valore della funzione obiettivo
pb_z=z;
rho_b=0; % funzione di fitness BEST (miglior particella)
rho_b_OLD=0; % funzione di fitness BEST (miglior particella) precedente

g_x=zeros(1,numvar+1); % gbest e relativo valore della funzione obiettivo
g_z=zeros(1,numvar);

for k=1:niter;
    % 1) Calcolo range della velocita' massima
    for i=1:numvar;
        vmax_x(i)=abs(max(x(:,i))-min(x(:,i)));
        vmax_z(i)=abs(max(z(:,i))-min(z(:,i)));
    end

    % 2) Calcolo funzione obiettivo
    for p=1:P
        for i=1:numvar
            app_2(p,i)=abs(z(p,i)*(1-z(p,i)));
            app_1(p,i)=max(0,-x(p,i));
        end

        rho(p)=var(max(0,Bench - Rendimenti*x(p,:))); % funzione obiettivo

        vinc_1(p)=sum(app_2(p,:)); % Vincolo di integralità
        vinc_2(p)=abs(sum(x(p,:))-1); % Vincolo di bilancio
        vinc_4(p)=max(0,kd-sum(z(p,:))); % Vincolo 1 di cardinalità
        vinc_5(p)=max(0,sum(z(p,:))-ku); % Vincolo 2 di cardinalità
        vinc_6(p)=sum(app_1(p,:)); % Vincoli di non negatività

        vincolo_4(p,k)=max(0,kd-sum(z(p,:))); % Vincolo 1 di cardinalità
        vincolo_5(p,k)=max(0,sum(z(p,:))-ku); % Vincolo 2 di cardinalità
        vincolo_6(p,k)=sum(app_1(p,:)); % Vincoli di non negatività
    end
end

```

```

    % calcolo violazione vincoli
    Delta_viol_OLD(p) = Delta_viol(p);
    Delta_viol(p) = (vinc_1(p)+vinc_2(p)+vinc_4(p)+vinc_5(p)+vinc_6(p));

end;

%% Calcolo la funzione di fitness
f=rho+(1/epsilon)*Delta_viol;
trace_f(k,:)=f;

% 3) Confronto valore della funzione obiettivo con il pbest
for p=1:P
    if f(p)<pb_x(p,numvar+1); % QUELLO GIUSTO!!!!
        pb_x(p,numvar+1)=f(p); % QUELLO GIUSTO!!!!
        rho_b_OLD = rho_b; % <----- AGGIUNTA GIANNI PER AGGIORNAMENTO PENALITA'
SU EPSILON
        rho_b=rho(p);
        Delta_viol_b=Delta_viol(p);
        for i=1:numvar;
            pb_x(p,i)=x(p,i);
            pb_z(p,i)=z(p,i);
        end
    end
end

% 3b) Memorizza il valore della funzione di rischio
RR(k) = rho_b;

% 4) Identificare la particella con la migliore posizione
[minimo,posizione]=min(pb_x(:,numvar+1));

g_x(numvar+1)=minimo;
bestglobalx(k,numvar+1)=minimo; %Giacomo on Declst : ho paura che le particle non
abbiano memoriaverificare se gx Ã" uguale all'ultimo di questo bestglobal
for i=1:numvar
    g_x(i)=pb_x(posizione,i);
    g_z(i)=pb_z(posizione,i);
    bestglobalx(k,i)=pb_x(posizione,i);
end

% 5) Aggiornamento delle velocitÃ e posizioni ATTENZIONE: fino
% al 18/06/2015 c'era l'errore seguente: nel caso si usi la nuova
% inizializzazione 'rand' va sostituito con '05'

for p=1:P;
    for i=1:numvar;
        if PSO_init % if-the-else aggiunto il 18/06/2015 da Giovanni Fasano
            r1 = 05;
            r2 = 05;
        else
            r1 = rand;
            r2 = rand;
        end
        vx(p,i)=w*vx(p,i)+c1*r1*(pb_x(p,i)-x(p,i))+c2*r2*(g_x(i)-x(p,i));
        vz(p,i)=w*vz(p,i)+c1*r1*(pb_z(p,i)-z(p,i))+c2*r2*(g_z(i)-z(p,i));
        if vx(p,i)>vmax_x(i);
            vx(p,i)=vmax_x(i);
        end
        if vz(p,i)>vmax_z(i);
            vz(p,i)=vmax_z(i);
        end
        x(p,i)=x(p,i)+vx(p,i);
        z(p,i)=z(p,i)+vz(p,i);
        tracex(p,i,k)=x(p,i);
    end
end
converg(k,:)=g_x(:,end);

```

```

    % Ritorno al passo 2
end

figure
plot(converg);title('Funzione di fitness del portafoglio
migliore'),xlabel('Iterazioni'),ylabel('Funzione di fitness');
figure
plot(RR(:,1));title('Tracking error del portafoglio
migliore'),xlabel('Iterazioni'),ylabel('Tracking error');
portafoglio=[g_x(1:end-1)' g_z'];
convergenzaglobale(:,giacomo) = converg;

fitness(giacomo)=g_x(end);
rend_portaf(giacomo)=g_x(1:end-1)*media';
pesi(:,giacomo)=g_x(1:end-1)';

fitnessglobale(:,giacomo)=fitness(giacomo); %Giacomo added on decl
portafoglioglobale(1,:)=g_x(1:end-1)';

%=====
% stampa vettore titoli finale
%=====
portafoglio

disp(['          '])
disp(['Numero di particelle          :', num2str(P)])
disp(['Numero di iterazioni          :', num2str(niter)])
disp(['Fitness                        :', num2str(fitness(giacomo))])
disp(['rho (misura di rischio)        :', num2str(rho_b)])
vinc_somma_pesi=sum(g_x(1:end-1))-1;
disp(['Vincolo somma pesi (somma_pesi-1) :', num2str(abs(vinc_somma_pesi))])
%vinc_non_negativita=sum(max(0,-g_x(1:end-1)))
vinc_cardinalita_Kd=max(0,kd-sum(g_z));
disp(['Vincolo cardinalità Kd          :', num2str(vinc_cardinalita_Kd)])
vinc_cardinalita_Ku=max(0,sum(g_z)-ku);
disp(['Vincolo cardinalità Ku          :', num2str(vinc_cardinalita_Ku)])
vinc_integralita=sum(vinc_6);
disp(['Vincolo di non negatività       :', num2str(vinc_integralita)])
disp(['          '])
end

toc;

```

Bibliografia

- Hu, X, & Eberhart, R (2002, July) Solving constrained nonlinear optimization problems with particle swarm optimization In *Proceedings of the sixth world multiconference on systemics, cybernetics and informatics* (Vol 5, pp 203-206)
- Best, M J, & Grauer, R R (1991) On the sensitivity of mean-variance-efficient portfolios to changes in asset means: some analytical and computational results *Review of Financial Studies*, 4(2), 315-342
- Cabrera, J. C., & Coello, C. A. (2007). Handling constraints in particle swarm optimization using a small population size. . In *Mexican International Conference on Artificial Intelligence* (pp. 41-51). Springer Berlin Heidelberg.
- Corazza, M., Fasano, G., & Gusso, R. (2013). Particle Swarm Optimization with non-smooth penalty reformulation, for a complex portfolio selection problem. *Applied Mathematics and Computation* , 611-624.
- Dhingra, H. L. (1980). *Effects of estimation risk on efficient portfolios*. Journal of business Finance & Accounting.
- Jansen, R., & Van Dijk, R. (2002). Optimal Benchmark Tracking with Small Portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, 28(2), 33-39.
- Jorion, P. (2003). Portfolio optimization with constraints on tracking error. *Financial Analysts Journal*, 70-82.
- Kennedy, J., & Eberhart, R. (2011). Particle swarm optimization. *Encyclopedia of machine learning* , 760 - 766.
- Luenberger, D. G. (2006). *Finanza e investimenti*. Apogeo.
- Poli, R., Kennedy, J., & Blackwell, T. (2007). Particle swarm optimization. *Swarm intelligence*, 33-57.
- Prometeia. (2016, Luglio 25). *Prometeia*. Retrieved from Sito Web Prometeia: <http://www.prometeia.it/atlante/andamento-deludente-mercati-finanziari>
- Riccetti, L. (2010). Minimum Tracking Error Volatility. Italia.
- Roll, R. (1992). A Mean/Variance Analysis of Tracking Error. *The Journal of Portfolio Management*, 18(4), 13-22.

Zhang, W.-J., Xie, X.-F., & Bi, D.-C. (2004). Handling Boundary Constraints for Numerical Optimization by Particle Swarm Flying in Periodic Search Space. *Congress of Evolutionary Computation*, (pp. 2307-2311). Oregon.

Ringraziamenti

Sicuramente questo traguardo raggiunto è il più bello e il più emozionante. Le persone che mi hanno affiancato in questo percorso sono state tante, ma un grazie particolare va fatto a te Valentina che mi sei stata sempre accanto. Un enorme grazie a te che ogni giorno mi hai spinto a dare il massimo e mi sei stata accanto quando ne avevo bisogno. Oggi è anche il giorno della tua laurea e sono veramente tanto orgoglioso di te, continua sempre così Dottoressa, Ad maiora!

Grazie ai miei Genitori. Senza di voi nulla di tutto ciò sarebbe stato possibile, mi avete dato la possibilità di scegliere quello che volevo e mi avete permesso di costruire il mio futuro. Grazie davvero.

Grazie Amici. Avete contribuito anche voi e non poco a questo mio traguardo.

Grazie Prof. Corazza per avermi seguito e supportato in questo elaborato e per essere stato sempre disponibile e preciso in ogni spiegazione.

Grazie a tutti voi, che avete sempre creduto in me.

Questo è solo l'inizio.